Лабораторная работа № 4
ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ ЗАТУХАЮЩИХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: исследовать свободные затухающие и вынужденные незатухающие колебания пружинного маятника и явления резонанса.
ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ: установка пружинного маятника, сосуд с жидкостью, грузы, динамометр, секундомер.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

Самым простым видом колебаний являются колебания, возникающие в системе под действием внутренних сил после того, как она была выведена из положения равновесия. Такие колебания называются свободными.

Пусть материальная точка малой массы m находится между двумя пружинами, натяжение пружин равномерное и материальная точка находится в положении равновесия. Сместим материальную точку вправо на величину $+x$. Тогда на материальную точку будет действовать сила упругости F, направленная к положению равновесия. Под действием этой силы материальная точка начнет двигаться к положению равновесия, где сила станет равной нулю. Однако, обладая запасом кинетической энергии, материальная точка пройдет положение равновесия и будет двигаться влево. Левая пружина будет сжиматься, а материальная точка сместится на величину $–x$. Под действием силы упругости пружины F материальная точка снова начнет двигаться к положению равновесия. Установится колебательное движение материальной точки под действием упругой силы, пропорциональной величине смещения *x*, т.е. $F=-kx$.

Колебательное движение материальной точки малой массы *m* подчиняется второму закону Ньютона $F=ma$, тогда

$$ma=-kx;\quad a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2};$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx;\ \frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x.$$

Обозначая

$$\frac{k}{m}=\omega^2, \tag{1}$$

где ω - круговая частота колебаний,
окончательно получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x.$$

Решением данного дифференциального уравнения будет функция

$$x=A\cos(\omega t+\alpha).$$

Покажем, что решение найдено правильно. Найдем:

$$v=\frac{dx}{dt}=-A\omega\sin(\omega t+\alpha);\ a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2\cos(\omega t+\alpha)=-\omega^2A\cos(\omega t+\alpha).$$

Но

$$A\cos(\omega t+\alpha)=x, \tag{2}$$

следовательно:

$$\frac{d^2x}{dt}=-\omega^2x.$$

Ускорение при гармоническом колебательном движении пропорционально смещению *x* и направлено к положению равновесия. В уравнении (2) *A* – амплитуда, т. е. максимальное смещение колеблющейся точки; $\omega t+\alpha$ - фаза колебаний; α - начальная фаза колебаний; ω - круговая частота.

Рассмотрим движение материальной точки массы *m* под действием упругой пружины, массой которой мы пренебрежем. (Рис. 1)

Материальная точка *m*, будучи выведена из состояния равновесия, начнет совершать гармонические колебания.

Коэффициент *k* есть коэффициент упругости или жесткость пружины. Численно он равен силе, которую нужно приложить к пружине, чтобы растянуть (или сжать) пружину на единицу длины.

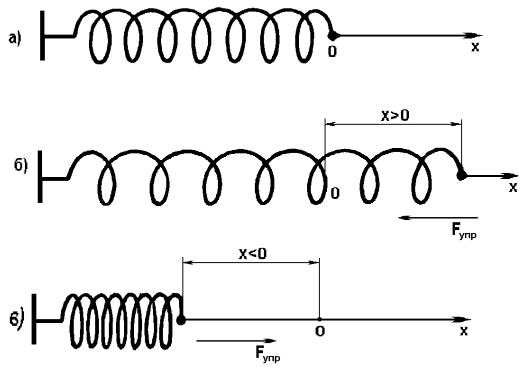

Рис. 1

Частоту колебаний материальной точки m под действием пружины (массой которой мы пренебрегаем) с коэффициентом упругости *k* можно получить, используя уравнение (1):

$$m\omega^2 = k, \qquad (3)$$

т.е.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ и } \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad (4)$$

что отвечает периоду *T*, равному

$$T = \frac{1}{\nu} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (5)$$

Частота и период не зависят от амплитуды колебаний и определяются только величинами *m* и *k*. Амплитуда и фаза колебания определяются из начальных условий.

Чтобы материальная точка *m* совершала гармоническое колебательное движение, не обязательно, чтобы на нее действовали именно упругие силы. Достаточно, чтобы сила при смещении от положения равновесия менялась согласно закону $F = -kx$.

Если сила, не являющаяся по своей природе упругой, подчиняется закону, то она называется «квазиупругой силой».

Если на тело, совершающее гармонические колебания, действует еще и сила сопротивления среды $F_{сопр}$, которая при небольших скоростях пропорциональна скорости первой степени

$$F_{сопр} = -r\upsilon$$

(знак «минус» показывает, что сила сопротивления среды направлена в сторону, противоположную скорости), то колебания называются затухающими. Это происходит потому, что энергия колеблющегося тела расходуется на преодоление силы сопротивления среды.

Зависимость смещения *x* от времени в этом случае выражается формулой:

$$x = A_0 e^{-\delta t}(\sin\omega t + \varphi_0), \qquad (6)$$

где $\delta = \dfrac{r}{2m}$ - коэффициент затухания.

Частота ω затухающих колебаний меньше частоты ω_o свободных колебаний связана соотношением:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,. \tag{7}$$

При затухающих колебаниях уменьшается амплитуда A=$A_0 e^{-\delta t}$, т.к. множитель $e^{-\delta t}$ со временем убывает.

Отношение амплитуд двух последовательных колебаний, отстоящих друг от друга на время, равное периоду колебаний T, равно:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 e^{-\delta T}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T} = const\,, \tag{8}$$

где $e^{-\delta T}$ - называется декрементом затухания.

Натуральный логарифм декремента затухания

$$\ln(e^{\delta T}) = \delta T = Д \tag{9}$$

называется логарифмическим декрементом затухания.

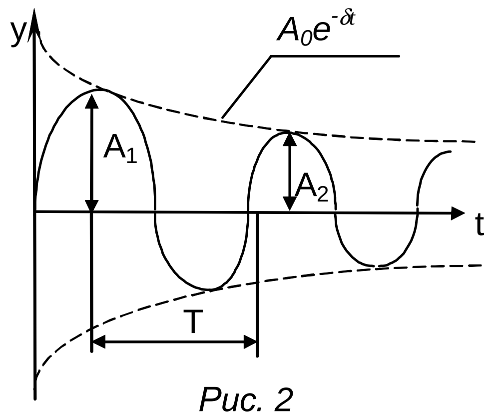

Рис. 2

Иначе логарифм отношения двух последовательных амплитуд называется логарифмическим декрементом затухания:

$$\ln\left(A_1 / A_2\right) = Д \tag{8}$$

Если на колеблющееся тело, кроме квазиупругой силы и силы сопротивления среды $F_{сопр}$, действует еще периодически изменяющаяся сила $F_{вын}$ (она называется вынужденной силой)

$$F_{вын} = F_0 \sin\omega_1 t\,, \tag{9}$$

где F_0 - амплитудное значение периодически изменяющейся силы; ω_1 - циклическая частота вынуждающей силы.

Следовательно тело будет колебаться с частотой, равной частоте вынуждающей силы, по закону

$$x = A\sin(\omega_1 t + \varphi). \tag{10}$$

Такие колебания называются вынужденными.

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от амплитудного значения вынуждающей силы F_0, массы колеблющегося тела m, коэффициента затухания δ и соотношения между частотой вынуждающей силы ω_1 и частотой собственных колебаний ω_0 маятника. Она выражается формулой:

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2 \omega_1^2}} \qquad (11)$$

Когда подкоренное выражение будет минимальным, амплитуда вынужденных колебаний приобретет максимальное значение. Явление резкого увеличения амплитуды колебаний называется резонансом.

Частота вынуждающей силы $\omega_{рез}$, при которых возникает явление резонанса, тоже зависит от коэффициента сопротивления среды δ и определяется выражением:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}\ . \qquad (12)$$

При малых значениях δ

$$\omega_{рез} \approx \omega_0.$$

Таким образом, резонансные явления наступают тогда, когда частота вынуждающей силы ω_1 приблизительно равна частоте собственных колебаний маятника ω_0.

ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ

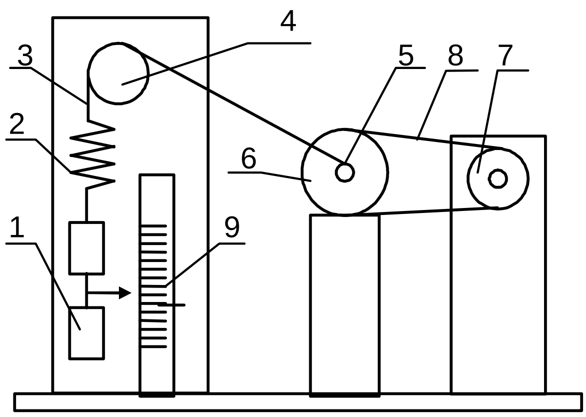

Рис. 3

Свободные затухающие и вынужденные колебания можно изучить на установке, изображенной на рис. 3.

Грузики *1* подвешены на пружине *2*, другой конец которой прикреплен к шнуру *3*, перекинутому через блок *4*. Другой конец шнура прикреплен к кривошипу *5* блока *6*. Блок *6* может приводиться во вращение от электродвигателя *7* с помощью ременной передачи *8*. Число оборотов электромотора может регулироваться с помощью реостата.

ХОД РАБОТЫ

ЗАДАНИЕ 1. Определение коэффициента упругой силы пружины *k* и собственной частоты ω_0 свободных колебаний пружинного маятника

1. Уберите мензурку с водой. Освободите пружину *2* от грузов *1*. Определите нулевое положение стрелки пружины на шкале *9*.

2. Нагружая пружину грузами, определите положение стрелки x_1, x_2 и т.д. (смещение груза от положения равновесия).

3. Используя закон Гука $F=-kx$, найдите жесткость пружины при различных значениях силы тяжести грузиков $P=mg$, уравновешивающей силу упругости. Вычислите среднее значение $k_{ср}$. Полученные результаты запишите в табл. 1.

Таблица 1

№	m_1, кг	x_1, м	k_1	m_2, кг	x_2, м	k_2	$k_{ср}$
1							
2							
3							

4. По среднему значению $k_{ср}$ вычислите собственную частоту пружинного маятника $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

5. Отклонив пружинный маятник с подвешенными к нему грузами *1* от положения равновесия, с помощью секундомера определите время n полных колебаний. Определите период колебаний по формуле:

$$T_0 = \frac{t}{n},$$

где n - число полных колебаний; t - время n колебаний.

6. Вычислите собственную частоту пружинного маятника через период свободных колебаний: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

7. Сравните результаты, полученные в п.4 и п.6.

ЗАДАНИЕ 2. Исследование затухающих колебаний пружинного маятника

1. Налейте в мензурку жидкость (воду). Опустите грузы *1* пружинного маятника в мензурку с жидкостью. Выведите маятник из положения равновесия и определите период затухающих колебаний.

2. Вычислите циклическую частоту затухающих колебаний.

3. Найдите коэффициент затухания δ и вычислите логарифмический декремент затухания θ.

ЗАДАНИЕ 3. Исследование вынужденных колебаний и определение резонансной частоты

1. Грузы 1 находятся в жидкости. Включите электродвигатель 7 через автотрансформатор. Напряжение на автотрансформаторе 10-20 В. Ползунок реостата должен быть на «нулевом» положении. В этом случае на пружину маятника будет действовать периодически изменяющаяся сила F, которая заставит грузы *1* колебаться в жидкости. Период T_1 этих колебаний будет совпадать с периодом изменяющейся силы.

2. Определите период колебаний T_1, вычислите циклическую частоту вынужденных колебаний ω_1.

3. Определите по шкале *9* амплитуду A (максимальное отклонение грузиков от положения равновесия) колебаний маятника при каждой частоте вращения блока *6* (т.е. при каждом положении ползунка реостата). Данные занесите в табл. 2.

Таблица 2

№	n_1	t_1,с	T_1,с	ω_1,рад/с	A, м

Примечания: а) Амплитуду вычислите по формуле: $A = \frac{|x_1 - x_2|}{2}$,

где x_1 - крайнее нижнее положение грузиков 1.
x_2 - крайнее верхнее положение грузиков 1.

б) Измерения повторите не менее 6-7 раз при различной частоте вынуждающей силы, изменяя напряжение питания электродвигателя.

4. По данным табл. 2 постройте график зависимости амплитуды колебаний A от частоты вынуждающей силы ω_1 $A=f(\omega_1)$.

5. По графику определите резонансную частоту ω_1. Сделайте вывод по итогам работы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие движения называются колебательными? гармоническими? Запишите уравнение движения.

2. Какие колебательные движения называются свободными, а какие – затухающими? Запишите закон этих движений.

3. Что характеризует собой логарифмический декремент затухания? Чему он равен?

4. Какие колебания называются вынужденными? Запишите уравнение движения.

5. Что называется явлением резонанса? Отметьте значение резонанса в технике и его вред.

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров Н.В., Яшкин А.Я.* Курс физики. Механика: Учеб. пособие для студентов заочников физико-математических факультетов пед. институтов. М.: Просвещение, 1978. – С. 330-339.

2. *Архангельский М.М.* Курс физики. Механика: Учеб. пособие для пед. институтов. – М.: Просвещение, 1975. – С. 327-335.

3. *Савельев И.Е.* Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. – В 2-х т. – М.: Наука, 1977. – Т. I. – С. 182-188.