Примеры решения задач

Задача 1. Электрический заряд на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону $Q = 10^{-6}\cos\left(2\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$, Кл. Определите: амплитуду колебаний заряда, циклическую частоту, частоту, период и начальную фазу колебаний заряда, амплитуду силы тока в контуре.

Дано

$Q = 10^{-6}\cos\left(2\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$, Кл.

$Q_m = ?$ $\omega_0 = ?$ $\nu_0 = ?$ $T = ?$

$\varphi = ?$ $J_m = ?$

Решение

Из заданного закона изменения электрического заряда на обкладках конденсатора

$$Q = 10^{-6}\cos\left(2\pi t + \frac{2\pi}{3}\right), \text{ Кл.} \qquad (1)$$

следует:

амплитуда колебаний заряда на обкладках конденсатора $Q_m = 10^{-6}$ Кл;

циклическая частота $\omega_0 = 2\pi$ с$^{-1}$;

начальная фаза колебаний заряда $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ рад.

Искомые частота и период колебаний соответственно равны

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi};\ T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Силу тока в колебательном контуре найдем, продифференцировав по времени уравнение гармонических колебаний заряда $Q = Q_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$J = \dot{Q} = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0 Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2),$$

откуда искомая амплитуда силы тока в контуре

$$J_m = \omega_0 Q_m.$$

Вычисляя, получаем $\nu_0 = 1$ Гц; $T = 1$ с; $J_m = 2\pi\cdot 10^{-6}$ А.

Ответ: $Q_m = 10^{-6}$ А; $\omega_0 = 2\pi$ с$^{-1}$; $\nu_0 = 1$ Гц; $T = 1$ с; $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ рад; $J_m = 2\pi\cdot 10^{-6}$ А.

Задача 2. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью C = 33 мкФ и катушку индуктивностью L = 0,3 Гн. Амплитуда Q_m колебаний заряда конденсатора составляет 1 мкКл. Пренебрегая сопротивлением контура, запишите уравнения: 1) изменения напряжения на конденсаторе в зависимости от времени; 2) изменения силы тока в цепи в зависимости от времени.

Дано	*Решение*
C =33 мкФ=$3{,}3\cdot10^{-5}$ мкФ L=0,3 Гн R=0 Q_m=1 мкКл=10^{-6} Кл	Напряжение в конденсаторе $$U_C=\frac{Q}{C}, \qquad (1)$$ где заряд Q совершает гармонические колебания $$Q=Q_m\cos\omega_0 t, \qquad (2)$$
$U_C(t)=?$ $J(t)$=?	

где собственная частота контура

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Вычисляя, получаем ω_0=32π с$^{-1}$.

Подставив выражение (2) в формулу (1) и учитывая значения ω_0, C и Q_m, искомое уравнение изменения напряжения на конденсаторе

$$U_C=\frac{Q_m}{C}\cos\omega_0 t=30{,}3\cos 32\pi t, \text{ мВ.}$$

Сила тока в колебательном контуре

$$I=\frac{dQ}{dt}=-\omega_0 Q_m\sin\omega_0 t=\omega_0 Q_m\cos\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{2}\right)=J_m\cos\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{2}\right),$$

где амплитуда силы тока

$$J_m=\omega_0 Q_m.$$

Вычисляя, получаем J_m = 0,1 мА.

Тогда искомое уравнение изменения силы тока в колебательном контуре

$$J_m=0{,}1\cos\left(32\pi t+\frac{\pi}{2}\right), \text{ мА.}$$

Ответ: $U_C=30{,}3\cos 32\pi t$, мВ; $J_m=0{,}1\cos\left(32\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$, мА.

Задача 3. Сила тока в колебательном контуре, содержащем катушку индуктивностью L = 0,2 Гн и конденсатор, со временем изменяется согласно уравнению $J = -0{,}2\sin 250\pi t$, А. Пренебрегая сопротивлением контура, определите: период колебаний; электроемкость конденсатора; максимальное значение напряжения на обкладках конденсатора; максимальную энергию магнитного поля; максимальную энергию электрического поля.

Дано	***Решение***
L = 0,2 Гн $J = -0{,}2\sin 250\pi t$, А $R = 0$	Сила тока в колебательном контуре согласно условию задачи $$J = -0{,}2\sin 250\pi t, \text{ А},$$
T =? C =? $U_{\max}$ =? $W_{\max}^{m}$ =? $W_{\max}^{m}$ =?	откуда следует, что амплитуда силы тока J_m = =0,2 А, а циклическая частота ω_0 =250π с$^{-1}$.

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Электроемкость конденсатора найдем из формулы Томсона, определяющей период колебаний в электрическом контуре

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

откуда

$$C = \frac{T^2}{4\pi^2 L}.$$

Максимальное значение напряжения на обкладках конденсатора

где Q_m – амплитуда колебаний заряда конденсатора.

Заряд Q совершает гармонические колебания (при $R \cong 0$) по закону

$$Q = Q_m \cos\omega_0 t$$

(начальную фазу приняли равной нулю).

Тогда сила тока в колебательном контуре

$$I = \dot{Q} = \omega_0 Q_m \sin\omega_0 t = -J_m \sin\omega_0 t,$$

где амплитуда колебаний силы тока

$$J_m = \omega_0 Q_m;$$

откуда

$$Q_m = \frac{J_m}{\omega_0}. \qquad (2)$$

Подставив формулу (2) в выражение (1), найдем искомое максимальное значение напряжения на обкладках конденсатора

$$U_m = \frac{J_m}{\omega_0 C}.$$

В случае незатухающих колебаний полная энергия контура, равная сумме энергий электрического поля конденсатора $CU^2/2$ и магнитного поля катушки $LJ^2/2$ остается постоянной. Следовательно,

$$CU_m^2/2 = LJ_m^2/2$$

т. е. максимальные энергии электрического и магнитного полей равны. Таким образом, искомые максимальные значения

$$W_{\max}^{э} = W_{\max}^{м} = \frac{LJ_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}.$$

Вычисляя, получаем T=8 мс; C=8,11 мкФ; $U_{\max}$=31,4 В; $W_{\max}^{m} = W_{\max}^{э}$= 4 мДж.

Ответ: T=8 мс; C=8,11 мкФ; $U_{\max}$=31,4 В; $W_{\max}^{m} = W_{\max}^{э}$= 4 мДж.

Задача 4. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L = 25 мГн, конденсатора емкостью C = 10 мкФ и резистора. Определите сопротивление резистора, если известно, что амплитуда тока в контуре уменьшилась в *e* раз за 16 полных колебаний.

Дано

L = 25 мГн = $2{,}5\cdot 10^{-2}$ Гн

C = 10 мкФ = 10^{-5} Ф

N_e = 16

R = ?

Решение

Число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды силы тока в *e* раз,

$$N_e = \frac{\tau}{T}, \qquad (1)$$

где τ – время релаксации, а T – условный период затухающих колебаний, соответственно равные

$$\tau = \frac{1}{\delta};\ T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}},$$

где $\delta = \dfrac{R}{2L}$ – коэффициент затухания; $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ собственная частота колебательного контура.

Подставив эти выражения в формулу (1), получаем

$$N_e = \frac{\frac{2L}{R}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1},$$

откуда искомое сопротивление

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C(1 + 4\pi^2 N_e^2)}}.$$

Вычисляя, получаем R = 0,995 Ом.

Ответ: R = 0,995 Ом.

Задача 5. Добротность Q колебательного контура равна 2. Определите, во сколько раз отличается частота ω свободных затухающих колебаний от собственной частоты ω_0 колебательного контура.

Дано	*Решение*
$Q = 2$	В реальном колебательном контуре (т. е. обладающим сопротивлением) частота ω свободных затухающих электромагнитных колебаний меньше собственной частоты ω_0 колебательного контура (при $R \cong 0$)
$\frac{\omega_0}{\omega} = ?$	

где δ – коэффициент затухания.

Коэффициент затухания найдем из выражения логарифмического декремента затухания: $\theta = \delta T$, где T – период затухающих колебаний, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ Зная логарифмический декремент затухания

$$Q = \frac{\pi}{\theta}$$

и учитывая вышеприведенные формулы, найдем

$$\delta = \frac{\theta}{T} = \frac{\pi}{QT} = \frac{\pi\omega}{Q \cdot 2\pi} = \frac{\omega}{2Q} \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), получаем

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \frac{\omega^2}{4Q^2}} = \omega\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}.$$

откуда искомое отношение

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

Вычисляя, получаем $\frac{\omega_0}{\omega}=1{,}03$.

Ответ: $\frac{\omega_0}{\omega}=1{,}03$.

Задача 6. Колебательный контур содержит катушку индуктивностью L = 5 мГн и конденсатор емкостью C = 2 мкФ. Определите критическое сопротивление $R_{кр}$ контура, при котором наступает апериодический процесс.

Дано	*Решение*
L = 5 мГн=$5\cdot10^{-3}$ Гн C = 2 мкФ=$2\cdot10^{-6}$ Ф	Частота свободных затухающих электромагнитных колебаний в контуре
$R_{кр}$=?	$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}.$$

При увеличении коэффициента затухания период затухающих колебаний растет и при $\delta=\omega_0$ обращается в бесконечность, т. е. вместо колебаний будет происходить апериодический разряд конденсатора.

Критическое сопротивление, при котором наступает апериодический процесс, определяется из условия:

$$\frac{R_{кр}^2}{4L^2}=\frac{1}{LC},$$

откуда

$$R_{кр}=2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Вычисляя, получаем $R_{кр}$ = 100 Ом.

Ответ: $R_{кр}$ = 100 Ом.

Задача 7. В колебательный контур, содержащий последовательно соединенные конденсатор и катушку с активным сопротивлением, подключена внешняя переменная ЭДС $\varepsilon=\varepsilon_m\cos\omega t$, частоту которой можно изменять, не меняя ее амплитуды. При частотах внешнего напряжения ω_1= 250 рад/с и ω_2= 360 рад/с амплитуды силы тока в цепи оказались одинаковыми. Определите резонансную частоту тока.

Дано	*Решение*
	Амплитуда тока

$\varepsilon = \varepsilon_m \cos\omega t$
ω_1 = 250 рад/с
ω_2 = 360 рад/с
ε_m =const
$J_{m_1} = J_{m_2}$

$\omega_{рез}$ =?

$$J_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad (1)$$

где ε_m – амплитуда внешней ЭДС; ω – частота внешней ЭДС.

Согласно формуле (1) амплитуды токов будут одинаковыми ($J_{m_1} = J_{m_2}$) при условии

$$\left|\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right| = \left|\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right| \qquad (2)$$

Максимуму резонансной кривой тока J_m соответствует резонансная частота $\omega_{рез}$, равная собственной частоте ω_0

$$\omega_{рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \qquad (3)$$

Учитывая формулу (3), равенство (2) можно записать в виде

$$\left|\omega_1 - \frac{1}{\omega_1 LC}\right| = \left|\omega_2 - \frac{1}{\omega_2 LC}\right| \text{ или } \left|\omega_1 - \frac{\omega_{рез}^2}{\omega_1}\right| = \left|\omega_2 - \frac{\omega_{рез}^2}{\omega_2}\right|$$

откуда

$$\omega_{рез}^2 = \left|\frac{\omega_1 - \omega_2}{\dfrac{1}{\omega_1} - \dfrac{1}{\omega_2}}\right| = \left|\omega_1\omega_2\right|.$$

Тогда искомая резонансная частота $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_1\omega_2}$.

Вычисляя, получаем $\omega_{рез}$ = 300 рад/с.

Ответ: $\omega_{рез}$ = 300 рад/с.

Задача 8. Последовательно соединенные резистор с сопротивлением R = 55 Ом и конденсатор подключены к источнику внешней ЭДС $\varepsilon = \varepsilon_m \cos\omega t$ с амплитудным значением ε_m = 200 В. Определите разность фаз между током и внешней ЭДС, если амплитуда J_m установившегося тока в цепи составляет 2 А.

Дано	***Решение***
$\varepsilon = \varepsilon_m \cos\omega t$ R = 55 Ом ε_m = 200 В J_m =2 А — φ =?	Согласно условию задачи $$\varepsilon = \varepsilon_m \cos\omega t.$$ Сила тока при установившихся вынужденных колебаниях $$J = J_m \cos(\omega t - \varphi),$$

где сдвиг по фазе между током и внешней ЭДС

$$tg\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}.$$

Поскольку катушка индуктивности в цепи отсутствует $(L \to 0)$, то

$$tg\varphi = -\frac{1}{\omega CR}. \qquad (1)$$

Значение электроемкости C найдем из выражения для амплитуды тока

$$J_m = \left.\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\right|_{L=0} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

откуда

$$C = \frac{1}{\omega\sqrt{\left(\dfrac{\varepsilon_m}{J_m}\right)^2 - R^2}}. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), найдем

$$tg\varphi = -\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_m}{RJ_m}\right)^2 - 1},$$

откуда искомая разность фаз между током и внешней ЭДС

$$\varphi = arctg\left(-\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_m}{RJ_m}\right)^2 - 1}\right).$$

Вычисляя, получаем $\varphi = -60°$, т. е. ток опережает по фазе внешнюю ЭДС на 60°.

Ответ: $\varphi = -60°$,

Задача 9. Цепь переменного тока состоит из последовательно включенных катушки индуктивностью L, конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R (рис. 1). Амплитудное значение суммарного напряжения на катушке и конденсаторе U_{LC} = 100 В, амплитудное значение напряжения на резисторе U_R = 160 В. Определите сдвиг фаз между током и внешним напряжением.

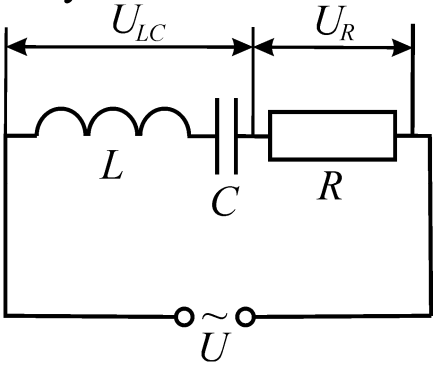


Рис. 1

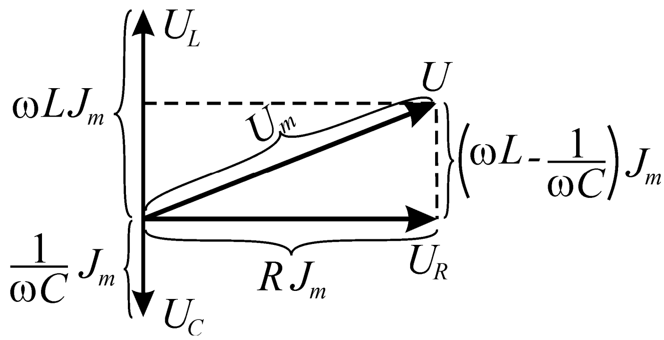


Рис. 2

Дано	*Решение*
U_{LC} = 100 В U_R = 160 В φ =?	В приведенной на рис. 1 цепи возникает переменный ток, который вызовет на всех элементах цепи падение напряжений. На рис. 2

приведена векторная диаграмма амплитуд падений напряжений на резисторе (U_R), катушке (U_L) и конденсаторе (U_c). Амплитуда U_m приложенного напряжения равна векторной сумме амплитуд этих падений напряжений.

Разность фаз между током и внешним напряжением определим с помощью векторной диаграммы

$$tg\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} \qquad (1)$$

Реактивные (ωL и $\dfrac{1}{\omega C}$) и активное (R) сопротивления найдем из выражений для амплитуд напряжений на соответствующих элементах цепи. Амплитудные значения напряжения на резисторе

$$U_R = RJ_m,$$

на катушке индуктивности

$$U_L = \omega L J_m,$$

на конденсаторе

$$U_C = \frac{1}{\omega C} J_m ,$$

где J_m – амплитуда силы тока.

Из приведенных выражений находим

$$R = \frac{U_R}{J_m};\ \omega L = \frac{U_L}{J_m};\ \frac{1}{\omega C} = \frac{U_C}{J_m}. \qquad (2)$$

Подставив выражения (2) в формулу (1), найдем

$$tg\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R}. \qquad (3)$$

$$U_{LC} = U_L - U_C$$

(см. векторную диаграмму), выражение (3) можно записать в виде

$$tg\varphi = \frac{U_{LC}}{U_R},$$

откуда искомый сдвиг фаз между током и внешним напряжением

$$\varphi = arctg\frac{U_{LC}}{U_R}.$$

Вычисляя, получаем $\varphi = 32°$.

Ответ: $\varphi = 32°$.

Задача 10. Катушка длиной $l = 25$ см и диаметром $d = 4$ см, обмотка которой содержит $N = 1000$ витков медной проволоки площадью поперечного сечения $S = 1$ мм^2, включена в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц. Определите, какая доля полного сопротивления Z цепи составляет реактивное сопротивление R_L. Удельное сопротивление меди $\rho = 17$ нОм·м.

Дано	***Решение***
$l = 25$ см $= 0{,}25$ м $d = 4$ см $= 4 \cdot 10^{-2}$ м $N = 1000$ $S = 1$ мм^2 $\nu = 50$ Гц $\rho = 17$ нОм·м $= 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м ——— $\frac{R_L}{Z} = ?$	Полное сопротивление цепи переменного тока (при отсутствии конденсатора) $$Z = \sqrt{R^2 + R_L^2} = \sqrt{R^2 + \omega_2 L^2}, \qquad (1)$$ где R – активное сопротивление; $R_L = \omega L$ – реактивное индуктивное сопротивление; ω – циклическая частота внешнего приложенного напряжения; L – индуктивность катушки.

Активное сопротивление катушки

$$R = \rho \frac{\pi N d}{S}, \tag{2}$$

циклическая частота

$$\omega = 2\pi\nu, \tag{3}$$

индуктивность катушки

$$L = \left.\frac{\mu_0 \mu N^2 S'}{l}\right|_{\mu=1} = \frac{\mu_0 N^2 \pi d^2}{4l} \tag{4}$$

(учли площадь сечения соленоида $S' = \dfrac{\pi d^2}{4}$).

Из формул (3) и (4) найдем реактивное индуктивное сопротивление

$$R_L = \frac{\mu_0 \pi^2 \nu N^2 d^2}{2l} \tag{5}$$

Вычисляя, получаем R = 2,13 Ом; R_L = 1,98 Ом.

Искомое отношение

$$\frac{R_L}{Z} = \frac{R_L}{\sqrt{R^2 + R_L^2}}$$

[учли формулу (1)].

Вычисляя, получаем $\dfrac{R_L}{Z}$ =0,68.

Ответ: $\dfrac{R_L}{Z}$ = 0,68.

Задача 11. В цепь переменного тока частотой ы резистор сопротивлением R и катушка индуктивностью L один раз включены последовательно, другой – параллельно. Определите для обоих случаев полное сопротивление цепи Z.

Дано	*Решение*
R L ω 1) последовательное включение 2) параллельное включение Z =?	**Последовательное включение *R* и *L*** (рис. 1) На рис. 2 приведена векторная диаграмма амплитудных значений падений напряжений на резисторе (U_R) и катушке (U_L), причем напомним, что исходной для построения векторной диаграммы выбирается ось токов. Амплитуда U_m приложенного напряжения равна векторной сумме амплитуд падений напряжений U_R и U_L.

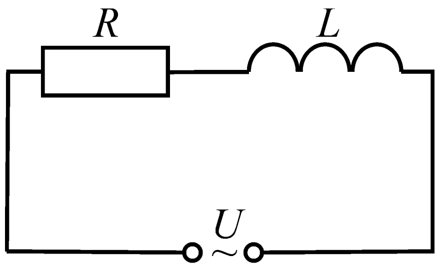


Рис. 1.

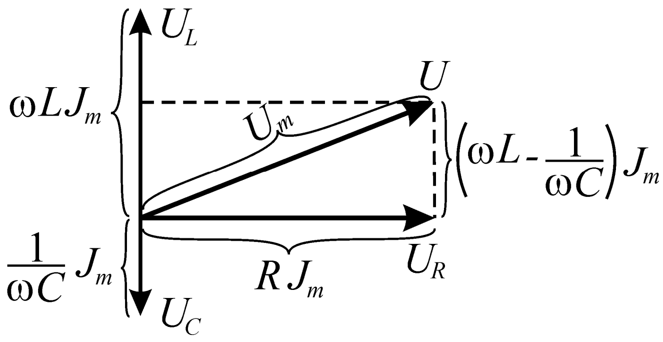


Рис. 2

Из прямоугольного треугольника имеем

$$U_m^2 = U_R^2 + U_L^2$$

Учитывая, что, $U_m = ZJ_m$, $U_R = RJ_m$, $U_L = \omega L J_m$, получаем

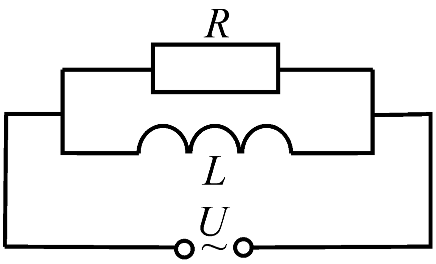
$$Z^2 = R^2 + (\omega L)^2$$

откуда искомое полное сопротивление цепи при последовательном включении резистора и катушки

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\,.$$

В данном случае $\varphi > 0$, т. е. ток отстает по фазе от внешнего напряжения.

Параллельное включение *R* и *L* (рис. 3)



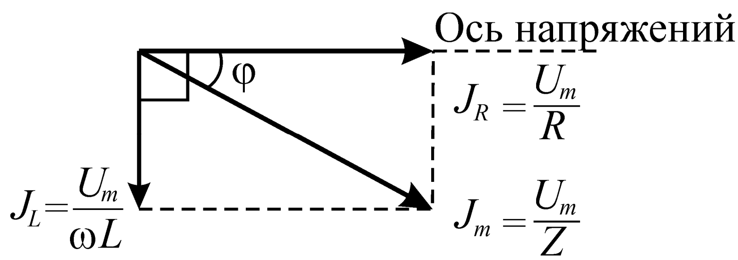


Рис. 3 Рис. 4

На рис. 4 приведена векторная диаграмма параллельной цепи. Она строится аналогично векторной диаграмме последовательной цепи (см. рис. 2), только исходной для построения выбирается ось напряжений. Из прямоугольного треугольника имеем

$$J_m = \sqrt{J_R^2 + J_L^2}\,.$$

Учитывая, что при параллельном соединении $U_m = U_R = U_L$ амплитуды силы токов $J_m = \dfrac{U_m}{Z}$, $J_R = \dfrac{U_R}{R}$, $J_L = \dfrac{U_L}{\omega L}$, получаем

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}}\,,$$

откуда искомое полное сопротивление цепи при параллельном включении резистора и катушки

$$Z = \frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\,.$$

В данном случае $\omega < 0$, т.е. ток опережает по фазе внешнее напряжение.

Ответ: 1) $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$; 2) $Z = \dfrac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$.

Задача 12. Какой процент амплитудного напряжения, считая от начала колебаний, составит напряжение U на обкладках конденсатора идеального колебательного контура в тот момент, когда энергия электрического поля $W_{эл}$ будет в n = 3 раза больше энергии магнитного поля $W_м$? Через какую долю периода это произойдет?

Дано	***Решение***
$W_{эл} = nW_м$ $n = 3$ $\dfrac{U}{U_m}\% - ?$ $\dfrac{t}{T} - ?$	Обозначим U_m амплитуду напряжения, t - время, прошедшее от начала колебания до того момента, когда энергия $W_{эл}$ стала в n раз больше энергии $W_м$.

Запишем формулы мгновенных значений энергий электрического и магнитного полей через время t от начала колебаний, когда энергия электрического поля $W_{эл}$ была в n раз больше энергии магнитного поля, а также формулу максимальной энергии электрического поля $W_{элm}$:

$$W_{эл} = \frac{CU^2}{2},\ W_{м} = \frac{W_{эл}}{n} = \frac{CU^2}{2n} UW_{элm} = \frac{CU_m^2}{2}.$$

По закону сохранения энергии $W_{эл} + W_{м} = W_{элm}$ или

$$\frac{CU^2}{2} + \frac{CU^2}{2n} = \frac{CU_m^2}{2},\ U^2\left(1 + \frac{1}{n}\right) = U_m^2,$$

$U^2 \dfrac{n+1}{n} = U_м^2$, откуда $\dfrac{U}{U_m} = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$.

Произведем вычисления: $\dfrac{U}{U_m} = \sqrt{\dfrac{3}{3+1}} = 0{,}866 = 86{,}6\%.$

Теперь запишем уравнение колебаний напряжения: $U = U_m \cos \omega t = U_m \cos \dfrac{2\pi}{T} t,$ ведь циклическая частота $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Поскольку $\dfrac{U}{U_m} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $\cos \dfrac{2\pi}{T} t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и, значит, $\dfrac{2\pi}{T} t = \dfrac{\pi}{6}$, откуда $\dfrac{t}{T} = \dfrac{1}{12}$.

Ответ: $U/U_m = 86{,}6\%$, $t/T = 1/12$.

Задача 13. При увеличении емкости колебательного контура на ΔC=0,1 мкФ частота колебаний в нем уменьшилась вдвое. Найти емкость конденсатора C_1 до увеличения и емкость C_2 последнего.

Дано	*Решение*
$\Delta C = 0{,}1$ мкФ	Обозначим ν_1 частоту колебаний в контуре до увеличения емкости конденсатора, ν_2 - ее же после увеличения.
$\dfrac{\nu_1}{\nu_2} = 2$	Запишем формулы частоты колебаний:
C_1 - ?	$\nu_1 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}}$ (1) и $\nu_2 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_2}}$ (2)
C_2 - ?	

Поскольку нам известно отношение ν_1/ν_2, то разделим (1) на (2):

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{2\pi\sqrt{LC_2}}{2\pi\sqrt{LC_1}} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}, \text{ откуда } \frac{C_2}{C_1} = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2. \ (3)$$

Еще нам известна разность емкостей: $\Delta C = C_2 - C_1$.

Из (3) $C_2 = C_1\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2$, поэтому $\Delta C = C_1\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 - C_1 = C_1\left(\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 - 1\right)$,

откуда $C_1 = \dfrac{\Delta C}{\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 - 1}$ и $C_2 = C_1 + \Delta C$.

Произведем вычисления: $C_1 = \dfrac{0{,}1}{2^2 - 1}$ мкФ =0,03 мкФ,

$C_2 = (0{,}03 + 0{,}1)$ мкФ =0,13 мкФ.

Ответ: $C_1 = 0{,}03$ мкФ, $C_2 = 0{,}13$ мкФ.

Задача 14. Частота колебаний в колебательном контуре $\nu = 1$ МГц, а индуктивность катушки L = 2 Гн. Проводник, из которого изготовлена катушка, медный, катушка содержит N =1000 витков. Диаметр витка D = 4 см, диаметр поперечного сечения проводника d = 0,2 мм. Определить добротность этого колебательного контура Q, считая колебания медленно затухающими. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

Дано	*Решение*
ν = 1 МГц L = 2 Гн N =1000 D = 4 см d = 0,2 мм $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. — Q - ?	Добротность контура определяется по формуле $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$. Здесь $R = \rho\frac{l}{S}$ - активное сопротивление контура, l – длина проводника и S – площадь поперечного сечения провода. Длину проводника можно определить, умножив число витков N на длину окружности витка $\pi D : l = N\pi D$. Площадь его поперечного сечения $S = \frac{\pi d^2}{4}$.

С учетом этого

$$R = \rho\frac{4\pi DN}{\pi d^2} = 4\rho\frac{DN}{d^2}. \qquad (2)$$

Емкость конденсатора C определим из формулы частоты собственных колебаний в этом контуре: $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, откуда

$$\sqrt{LC} = \frac{1}{2\pi v},\ LC = \frac{1}{(2\pi v)^2} \text{ и } C = \frac{1}{(2\pi v)^2 L}. \qquad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), мы решим задачу в общем виде:

$$Q = \frac{d^2}{4\rho DN}\sqrt{L(2\pi\nu)^2 L},\ Q = \frac{\pi\nu L d^2}{2\rho DN}.$$

Произведем вычисления: $Q = 1{,}8 \cdot 10^3$.

Ответ: $Q = 1{,}8 \cdot 10^3$.

Задача 15. В цепь переменного тока с напряжением U = 220 В стандартной частоты включены последовательно конденсатор, резистор сопротивлением R=100 Ом и катушка с индуктивностью L=1 Гн. При какой емкости конденсатора C в этой цепи наступит резонанс напряжений? Какова максимальная сила тока I_m при резонансе? Чему равны добротность цепи Q и ее волновое сопротивление ρ?

Дано

$U = 220$ В

$R = 100$ Ом

$L = 1$ Гн

$\nu = 50$ Гц

$C = ?$

$I_m = ?$

$Q = ?$

$\rho = ?$

Решение

При резонансе напряжений индуктивное сопротивление X_L равно емкостному X_C: $X_L = X_C$, где $X_L = \omega L = 2\pi\nu L$ и $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C}$, поэтому $2\pi\nu L = \frac{1}{2\pi\nu C}$, откуда $C = \frac{1}{(2\pi\nu)^2 L}$.

Амплитуда силы тока I_m при резонансе напряжений, когда реактивное сопротивление $X_L - X_C = 0$, определяется по закону Ома равенством $I_m = \frac{U_m}{R}$, где $U_m = U\sqrt{2}$, поэтому $I_m = \frac{U\sqrt{2}}{R}$.

Добротность цепи определяет формула $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, а волновое сопротивление $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Произведем вычисления: $C = \frac{1}{(2 \cdot 3{,}14 \cdot 50)^2 \cdot 1}$ Ф $= 1 \cdot 10^{-5}$ Ф,

$I_m = \frac{220\sqrt{2}}{100}$ А $= 3{,}1$ А, $Q = \frac{1}{100}\sqrt{\frac{1}{1 \cdot 10^{-5}}} = 3{,}2$, $\rho = \sqrt{\frac{1}{1 \cdot 10^{-5}}}$ Ом=320 Ом.

Ответ: $C = 1 \cdot 10^{-5}$ Ф, $I_m = 3{,}1$ А, $Q = 3{,}2$, $\rho = 320$ Ом.