Задачи для самостоятельного решения

Тема 1. Кинематика и динамика колебательного движения.

1.1. Частота колебаний крыльев пчелы ν_1=400 Гц, а период колебаний крыльев комара T_2=2 мс. На сколько больше взмахов крыльями сделает комар за время t=0,5 мин, чем пчела.

Ответ: $\Delta N = t(1/T_2 - \nu_1) = 3000$.

1.2. Когда пчела летит на клеверное поле, ее крылья колеблются с частотой ν_1=400 Гц, а когда летит обратно, то частота колебаний ее крыльев ν_2=300 Гц. Скорость полета пчелы на поле υ_1=8 м/с, а обратно υ_2=5 м/с, расстояние от улья до поля $S = 200$ м. Найти разность ΔN между числом взмахов крыльев пчелы при полете на поле и обратно.

Ответ: $\Delta N = S(\nu_2/\upsilon_2 - \nu_1/\upsilon_1) = 2\cdot 10^3$.

1.3. Колебательное движение точки описывается уравнением $x = 0{,}05\cos 20\pi t$ см. Найти зависимость скорости и ускорения точки от времени, координату x_1, скорость υ_1 и ускорение a_1 спустя $t = 1/60$ с от начала колебания. Найти максимальную скорость υ_m и максимальное ускорение точки a_m.

Ответ: $\upsilon = -3{,}14\sin 20\pi t$ см/с, $a = -1{,}97\cos 20\pi t$ м/с^2, $x_1 = 2{,}5\cdot 10^{-4}$ м, $\upsilon_1 = -0{,}027$ м/с, $a_1 = -0{,}99$ м/с^2, $\upsilon_m = 0{,}0314$ м/с, $a_m = 1{,}97$ м/с^2.

1.4. Уравнение колебаний точки имеет вид $x = 0{,}08\cos\pi(t + 0{,}2)$ м. Определить амплитуду A, период T и начальную фазу φ_0 колебаний точки.

Ответ: $A = 0{,}08$ м, $T = 2$ с, φ_0=π/5 рад.

1.5. Амплитуда гармонического колебания точки $A = 5$ см, период $T = 4$ с. Найти максимальную скорость точки υ_m, а также ее скорость υ через $t_1 = T/8$ от начала колебания. Найти максимальное ускорение a_m этой точки, а также ускорение a через $t_2 = T/8$ от момента времени, когда скорость точки стала равна υ.

Ответ: $\upsilon_m = 2\pi A/T = 0{,}078$ м/с, $\upsilon = -\upsilon_m \sin(\pi/4) = 0{,}055$ м/с, $a_m = (2\pi/T)^2 A = 0{,}12$ м/с^2, $a = a_m \cos(\pi/2) = 0$.

1.6. Точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 50$ мм и периодом $T = 2$ с. Начальная фаза колебаний φ_0=90°.

Написать уравнение колебаний точки $x = x(t)$. Чему равно смещение точки x_1 в момент времени $t_1 = T/4$?

Ответ: $x = 0{,}05\cos\pi(t + 0{,}5)$ м, $x_1 = -0{,}05$ м.

1.7. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 10$ см и периодом $T = 2$ с. Написать уравнение этих колебаний $x = x(t)$ и найти фазу колебаний φ_1, когда смещение точки стало равно $x_1 = 5$ см.

Ответ: $x = 0{,}1\cos\pi t$ м, $\varphi_1 = \pi/3$ рад.

1.8. Материальная точка совершает гармонические колебания, уравнение которых имеет вид $x = 2\cos 5t$ см. Найти максимальные скорость υ_m и ускорение a_m точки.

Ответ: υ_m=0,1 м/с, $a_m = 0{,}5$ м/с^2.

1.9. Составить уравнение гармонического колебания точки $x = x(t)$, если амплитуда колебаний $A = 5$ см, период колебания $T = 0{,}5$ с и начальная фаза колебания φ_0=90°. Построить график зависимости $x = x(t)$.

Ответ: $x = 0{,}05\cos(4\pi t + \pi/2)$ м.

1.10. Уравнение движения материальной точки имеет вид $x = 0{,}2\cos\pi t$ м. Чему равны средняя скорость $\upsilon_{ср}$ и среднее ускорение точки $a_{ср}$ за время $t = 3T/4$ с?

Ответ: $\upsilon_{ср}$=0,4 м/с, $a_{ср}$=0,4 м/с^2.

1.11. На рис. 1. приведен график зависимости скорости материальной точки от времени колебаний. Определить, пользуясь графиком, амплитуду A и циклическую (круговую) частоту ω колебаний. Записать уравнение колебаний $x = x(t)$.

Ответ: $A = 0{,}25$ м,

$\omega = 0{,}25\pi$ рад/с,

$x = 0{,}25\cos 0{,}25\pi t$.

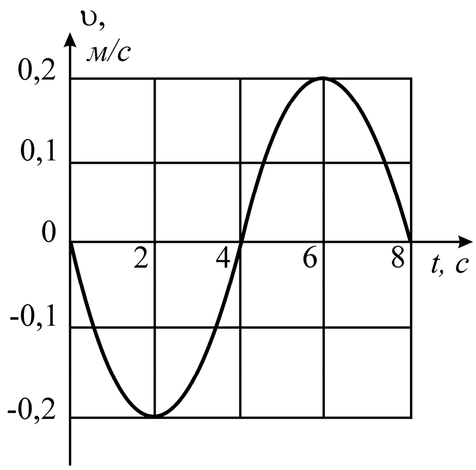


Рис. 1.

1.12. На рис. 2 приведен график зависимости ускорения a колебаний материальной точки от времени t. Определить амплитуду A и циклическую частоту ω колебаний. Записать уравнение колебаний $x = x(t)$.

Ответ: $A = 0{,}016$ м,
$\omega = 0{,}5\pi$ рад/с,
$x = 0{,}016\cos 0{,}5\pi t$.

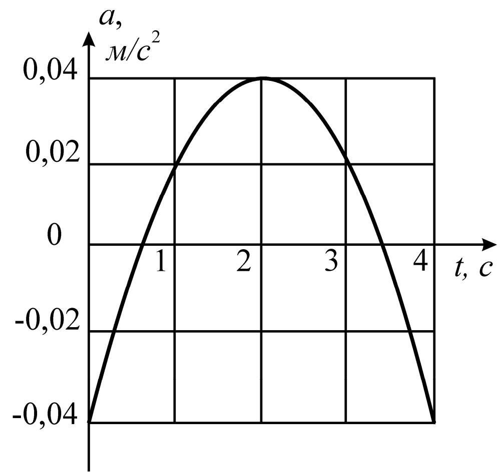


Рис. 2.

1.13. Составить уравнение гармонического колебания точки $x = x(t)$, если амплитуда колебаний $A = 5$ см, период колебания $T = 0{,}5$ с и начальная фаза колебания φ_0=90°. Построить график зависимости $x = x(t)$.

Ответ: $x = 0{,}05\cos(4\pi t + \pi/2)$ м.

1.14. Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, $E = 3\cdot 10^{-5}$ Дж, максимальная сила, действующая на тело, $F_m = 1{,}5\cdot 10^{-3}$ Н. Написать уравнение движения этого тела, если период колебаний $T = 2$ с и начальная фаза φ_0=60°.

Ответ: $x = 0{,}04\cos(\pi t + \pi/3)$ м.

1.15. Амплитуда гармонических колебаний материальной точки $A = 2$ см, полная энергия колебаний $E = 3\cdot 10^{-7}$ Дж. При каком смещении x от положения равновесия на колеблющуюся точку действует сила $F = 2{,}25\cdot 10^{-3}$ Н?

Ответ: $x = \dfrac{FA^2}{2E} = 1{,}5$ м.

1.16. Определите отношние инетической энергии T точки, совершающей гармонические колебания, к ее потенциальной энергии Π, если известна фаза колебаний.

Ответ: $T/\Pi = \mathrm{tg}^2(\omega_0 t + \varphi)$.

1.17. При фазе $\alpha_1 = \pi/3$ рад смещение $x_1 = 1$ см. Найти амплитуду A и смещение x_2 при фазе $\alpha_2 = 3\pi/4$ рад.

Ответ: $A = 0{,}02$ м, $x_2 = -0{,}014$ м.

1.18. Материальная точка массой m колеблется с частотой ν и амплитудой A. Найти зависимость от времени t потенциальной и кинетической энергии Π и T. Какова полная механическая энергия E этой точки?

Ответ: $\Pi = 2m(\pi\nu A)^2 \cos^2(2\pi\nu t + \varphi_0)$,

$$T = 2m(\pi\nu A)^2 \sin^2(2\pi\nu t + \varphi_0),\ E = 2m(\pi\nu A)^2.$$

1.19. Человек массой $m = 80$ кг качается на качелях. Амплитуда его колебаний $A = 1$ м. За t_1=1 мин он совершает $N = 15$ полных колебаний. Найти кинетическую энергию T и потенциальную энергию Π качающегося человека через $t = T/6$. Начальная фаза φ_0=0.

Ответ: $\Pi = 2m[A\pi \mathrm{N}\cos(\pi/3)/t_1]^2 = 24{,}6$ Дж,

$$T = 2m(A\pi N/t_1) - \Pi = 74{,}0 \text{ Дж.}$$

1.20. Через какое время, считая от начала колебания, смещение гармонически колеблющейся точки составит $\sqrt{3}/2$ амплитуды? Период колебаний точки $T = 2$ с.

Ответ: $t = T/12 = 1/6$ с.

1.21. Через какое время t, считая от начала колебания, смещение x гармонически колеблющейся точки составит $1/\sqrt{2}$ амплитуды A? Частота колебаний точки $\nu = 0{,}2$ Гц.

Ответ: $t = 1/(8\nu) = 0{,}6$ с.

Тема 2. Математический и пружинный маятники

2.1. Легкая пружина с жесткостью $k = 0{,}2$ Н/м подвешена к штативу. В некоторый момент к ее свободному концу подвесили гирю массой $m = 100$ г и осторожно отпустили. Запишите уравнение колебаний груза $x = x(t)$, приняв за начало отсчета колебаний и времени положение равновесия пружины с грузом.

Ответ: $x = mg\cos t\sqrt{k/m}/k$.

2.2. На идеально гладкой поверхности стола закреплена легкая пружина с жесткостью k, к концу которой прикреплен шарик массой m. Стол движется горизонтально со скоростью υ_0 и в некоторый момент времени резко останавливается. С какой амплитудой A шарик начнет совершать колебания? Чему будут равны период колебаний T и максимальное ускорение шарика a_m?

Ответ: $A = \upsilon_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, $a_m = \dfrac{k}{m}A.$

2.3. К пружине подвешен груз. Зная, что максимальная кинетическая энергия колебаний груза $T_m = 1$ Дж, найти жесткость пружины k. Амплитуда колебаний $A = 5$ см.

Ответ: $k = 2T_m / A^2 = 800$ Н/м.

2.4. Между точками B и C шарик массой m совершает гармонические колебания с периодом T. Определить величину возвращающей силы F и кинетическую энергию T шарика по прошествии времени t после прохождения им положения равновесия, если расстояние BC равно $2l$.

Ответ: $F = 4ml(\pi / T)^2 \sin(2\pi t / T)$, $T = 2m(\pi l / T)^2 \cos^2(2\pi t / T)$.

2.5. К резиновому шнуру длиной l_0=40 см с радиусом поперечного сечения $r = 1$ мм подвешена гиря массой $m = 0{,}5$ кг. Определить период T вертикальных колебаний гири, если модуль Юнга для резины $E = 3$ Н/мм^2.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{ml_0 / (\pi E)} / r$.

2.6. Жесткость пружин рессоры вагона $k = 4{,}81 \cdot 10^5$ Н/м. Масса вагона с грузом $M = 6{,}4 \cdot 10^4$ кг. Вагон имеет $n = 4$ рессоры. При такой скорости υ вагон начнет сильно раскачиваться вследствие толчков на стыках рельсов, если длина рельса $l = 12{,}8$ м.

Ответ: $\upsilon = l\sqrt{nk / m} / (2\pi)$=11,2 м/с.

2.7. Во сколько раз изменится частота колебаний резиновой нити, если от нее отрезать четверть длины, а груз оставить тот же?

Ответ: $\nu_2 / \nu_1 = 1{,}15$.

2.8. Во сколько раз изменится частота колебаний рессор автомобиля, если в него положить груз, масса которого составляет половину массы автомобиля?

Ответ: уменьшится в 1,2 раза.

2.9. В шар массой M (рис. 3) попадает летевшая со скоростью υ пуля, масса которой в 10 раз меньше массы шара. С какой частотой ν станет колебаться шар с пулей? Чему будет равна амплитуда колебаний A, если жесткость пружины k?

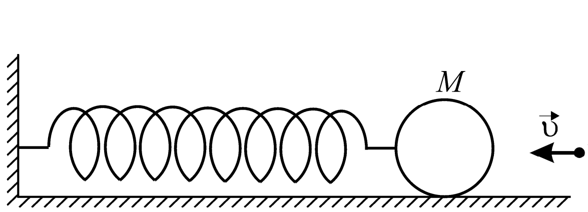
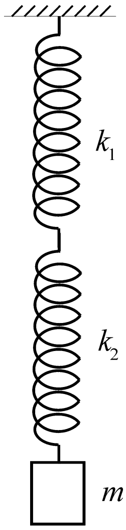


Рис. 3.

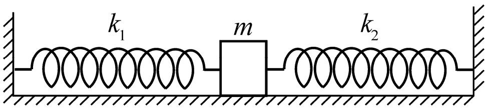
Ответ: $\nu = \sqrt{k / (1{,}1M)} / 2\pi$, $A = 0{,}1M\upsilon / \sqrt{1{,}1kM}$.

2.10. Во сколько раз частота колебаний груза массой m на рис. 4а больше частоты колебаний этого же груза, изображенного на рис.4б? Жесткости пружин k_1 и k_2 известны.

Ответ: $\nu_1/\nu_2 = \sqrt{k_1 k_2}$.



а)



б)

Рис. 4

2.11. Два бруска массами по m каждый сжимают пружину, будучи связаны нитью (рис. 5). Когда нить пережигают, они начинают колебаться с частотой ν. Чему равна жесткость пружин k.

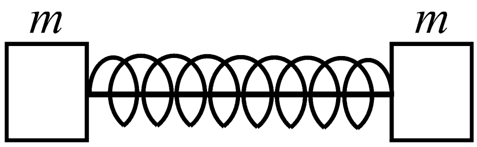


Рис. 5

Ответ: $k = 2m(\pi\nu)^2$.

2.12. Математический маятник подвешен на нити и совершает гармонические колебания. Во сколько раз изменится частота его колебаний, если температура в помещении, где он находится, повысится от t_1 °C до t_2 °C? Температурный коэффициент линейного расширения материала нити α известен.

Ответ: $\dfrac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{(1+\alpha t_1^\circ)/(1+\alpha t_2^\circ)}$.

2.13. Как относятся длины математических маятников, если за одно и тоже время один из них совершает $N_1 = 10$, а второй $N_2 = 20$ колебаний?

Ответ: $l_2/l_1 = (N_1/N_2)^2 = 1/4$.

2.14. Математический маятник подвесили на нити в вертикальном электрическом поле, направленном вниз. Период его свободных колебаний T_0=0,626 с. После помещения в электрическое поле период колебаний шарика стал $T = 0{,}314$ с. С какой силой F действовало электрическое поле на шарик, если масса шарика $m = 1$ г? Какова длина нити l, на которой подвешен шарик?

Ответ: $F = m(l(2\pi/T)^2 - g) = 0{,}029$ Н, $l = g(T_0/(2\pi))^2 = 0{,}098$ м.

2.15. Для определения ускорения a, с которым поднимается ракета, в нее был помещен математический маятник длиной l, который при взлете совершил N полных колебаний за время t. Найти ускорение a ракеты.

Ответ: $a = l(2\pi N/t)^2 - g$.

2.16. Медный стержень с диаметром поперечного сечения d подвешен за середину к пружине и совершает гармонические колебания в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости колебаний. Полная механическая энергия колебаний стержня равна E. Определить максимальное значение ЭДС электромагнитной индукции ε_m, возбуждаемое в стержне в процессе колебаний. Длина стержня l.

Ответ: $\varepsilon_m = B\sqrt{8El/(\pi\rho)}/d$.

2.17. Математический маятник массой m, подвешенный на нити длиной l, совершает гармонические колебания в однородном электрическом поле плоского воздушного конденсатора $(\varepsilon = 1)$ с зарядом q на обкладках. Обкладки расположены вертикально, площадь обкладок S. Найти частоту колебаний ν этого маятника. Заряд маятника q_0.

Ответ: $$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{l}\sqrt{g^2 + \left(\frac{qq_0}{\varepsilon\varepsilon_0 mS}\right)^2}}.$$

2.18. Найти период колебаний математического маятника длиной l, подвешенного в вагоне, если поезд, двигаясь равноускоренно без начальной скорости $(\upsilon_0 = 0)$, за время t прошел путь S.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{l/\sqrt{(2S/t^2)^2 + g^2}}$.

2.19. Маятниковые часы, выверенные при комнатной температуре, «уходят» за $t = 1$ сут на $\Delta t = 2$ мин вследствие изменения длины маятника, вызванного понижением температуры. Во сколько раз нужно изменить длину маятника l_0/l, чтобы часы шли верно.

Ответ: $l_0/l = 1/(1 - \Delta t/t)^2 = 1{,}0028$.

2.20. Математический маятник установлен на тележке, скатывающейся без трения с наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Чему равен период T колебаний маятника во время движения тележки? Длина маятника l.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{l/(g\cos\alpha)}$.

2.21. Математический маятник длиной l при совершении гармонических колебаний сталкивается с упругой массивной стенкой в моменты, когда он принимает вертикальные положения. Найти частоту колебаний маятника ν. Длительностью столкновений пренебречь.

Ответ: $\nu = \sqrt{g/l}/\pi$.

2.22. Период колебаний первого математического маятника T_1, а второго T_2. Чему равен период колебаний T маятника, длина которого равна сумме длин первого и второго маятников?

Ответ: $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$.

2.23. К пружине подвешена чаша весов с гирями. При этом период вертикальных колебаний чаши равен $T_1 = 0{,}5$ с. После того, как на чашу весов положили добавочную гирю, период колебаний стал T_2=0,6 с. Насколько удлинилась пружина от прибавления добавочной гири?

Ответ: $\Delta l = g(T_2^2 - T_1^2)/(4\pi^2) = 2{,}7\cdot 10^{-2}$ м.

2.24. Чему равно отношение потенциальной энергии точки Π, совершающей гармоническое колебание, к ее кинетической энергии T, для момента времени $t = T/6$? Начальная фаза колебаний равна нулю.

Ответ: $\Pi / T = 3$.

2.25. Гиря, подвешенная к пружине, колеблется по вертикали с амплитудой $A = 4$ см. Определить полную энергию колебаний E гири, если под действием силы $F = 10$ Н пружина удлиняется на x=0,5 м.

Ответ: $E = FA^2/(2x) = 1{,}6\cdot 10^{-2}$ Дж.

2.26. Математический маятник колеблется с частотой ν. Амплитуда его колебаний A. Чему будет равна скорость υ маятника в тот момент, когда его потенциальная энергия станет равна кинетической? Начальная фаза колебаний равна нулю.

Ответ: $\upsilon = \sqrt{2}\pi\nu A$.

2.27. Математический маятник длиной $l = 10$ см имеет такую же частоту, что и пружинный маятник массой $m = 40$ г. Определить жесткость пружины k.
Ответ: $k = mg/l = 3{,}9$ Н/м.

2.28. К пружине подвешен груз массой $m = 10$ кг. Зная, что пружина под действием силы $F = 10$ Н растягивается на $x = 1$ см, определить период T вертикальных колебаний груза.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{mx/F} = 0{,}6$ с.

Тема 3. Физический маятник

3.1. Маятник состоит из очень легкого стержня, на котором закреплены два одинаковых груза – один на расстоянии 30 см от оси, другой на расстоянии 15 см от оси. Каков период колебаний такого маятника?

Ответ: T =1,74 с.

3.2. Определить период колебания однородного шара около горизонтальной оси, проходящей через точку, отстоящую от центра шара на расстоянии 0,3 радиуса шара. Радиус шара равен 6 см.

Ответ: T =0,63 с.

3.3. На концах тонкого стержня длиной L = 1 м и массой m_3 = 400 г укреплены шарики малых размеров массами m_1 = 200 г и m_2 = 300 г. Стержень колеблется около горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину (точка О на рис. 6) определить период T колебаний, совершаемых стержнем.

Ответ: T =2,17 с.

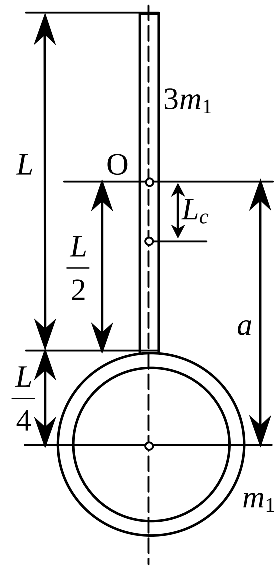


Рис. 6

3.4. Шар, радиус которого 5 см, подвешен на нити длиной 10 см. Определить относительную погрешность, которую допускают, если, вычисляя период колебаний маятника, принимают его за математический маятник длиной 15 см.

Ответ: 2,2 %.

3.5. Тонкая однородная пластина в форме равностороннего треугольника с высотой h и массы m совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной из его сторон.

Определить момент инерции пластины относительно этой оси, если период колебаний маятника равен $T = \pi\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

Ответ: $J = \dfrac{mh^2}{18}$.

3.6. Два физических маятника совершают малые колебания вокруг одной и той же горизонтальной оси с частотами ω_1 и ω_2. Их моменты инерции относительно данной оси равны соответственно J_1 и J_2. Маятники привели в состояние устойчивого равновесия и скрепили друг с другом. Какова будет частота малых колебаний составного маятника?

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2}{J_1 + J_2}}$.

3.7. Тонкий однородный стержень длиной l=60 см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, отстоящей на расстоянии x=15 см от его середины. Определите период колебаний стержня, если он совершает малые колебания.

Ответ: T = 1,19 с.

3.8. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной 35 см. Определите, на каком расстоянии от центра масс должна быть точка подвеса, чтобы частота колебаний была максимальной.

Ответ: x = 10,1 см.

3.9. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной l и массой m, который колеблется относительно оси проходящей через один из его концов. На стержне находится груз массой M. Определите, на каком расстоянии от центра масс должен находиться груз, чтобы частота колебаний была максимальной.

3.10. Однородный диск радиусом R = 20 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей на расстоянии l = 15 см от центра диска. Определите период T колебаний диска относительно этой оси.

Ответ: T = 1,07 с.

3.11. Некоторое тело качается около оси с периодом T_1=0,5 с. Если же к нему прикрепить грузик массой m=50 г на расстоянии

l=10 см ниже оси, то оно качается с периодом T=0.6 с. Найти момент инерции тела относительно оси качания.

Ответ: $J = 0{,}12 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2.

3.12. Математический маятник длиной l_1=0,4 м и физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной l_2=0,6 м синхронно колеблются около одной и той же горизонтальной оси. Определить расстояние d центра тяжести стержня от оси колебаний.

Ответ: $d = 0{,}1$ м.

3.13. Тело массой m=4 кг, закрепленное на горизонтальной оси, совершало колебания с периодом T_1=0,8 с. Когда на эту ось был насажен диск радиуса R=0,2 м и массой M=4 кг так, что геометрическая ось диска совпала с осью колебаний тела, период колебаний стал T_2=1,2 с. Найти момент инерции тела J относительно оси колебаний.

Ответ: $J = 6{,}4 \cdot 10^{-2}$ кг·м^2.

3.14. Физический маятник совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси O с частотой ω_1= 15,0 с$^{-1}$. Если в положении равновесия к нему прикрепить под осью O на расстоянии l = 20 см от нее небольшое тело массы m = 50 г, то частота колебаний становится ω_2 = 10,0 с$^{-1}$. Найти момент инерции первоначального маятника относительно оси O.

Ответ: $J = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$ кг · м^2.

3.15. Тонкое кольцо радиуса R совершает малые колебания около точки O (рис. 7). Найти их период, если колебания происходят: а) в плоскости рисунка; б) в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка.

Ответ: а) $T = 2\pi\sqrt{2R/g}$; б) $T = 2\pi\sqrt{3R/2g}$.

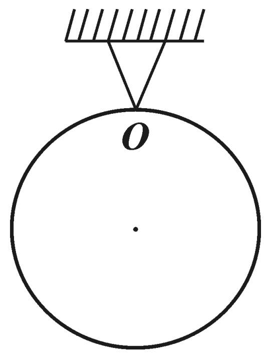


Рис. 7

3.16. Обруч диаметром 19,8 см висит на гвозде, вбитом в стену. Его отклоняют от положения равновесия. Начинаются колебания в плоскости, параллельной стене. Определите период и приведенную длину физического маятника.

Ответ: T =0,88 с; d =0,198 см.

3.17. Физический маятник установили так, что его центр тяжести оказался над точкой подвеса. Из этого положения маятник начал двигаться к положению устойчивого равновесия, которое он прошел с угловой скоростью ω. Найти период малых колебаний этого маятника.

Ответ: $T = 4\pi/\omega$.

3.18. Однородный стержень длины l совершает малые колебаний вокруг горизонтальной оси OO', перпендикулярной стержню и проходящей через одну из его точек. Найти расстояние между центром стержня и осью OO', при котором период колебаний будет наименьшим.

Ответ: $x = l/\sqrt{12}$.

3.19. Сплошной однородный цилиндр радиуса r катается без скольжения по внутренней стороне цилиндрической поверхности радиуса R, совершая малые колебания. Найти их период.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{3(R-r)/2g}$.

3.20. Шар, радиус которого R = 5 см, подвешен на нити длиной L_0 = 10 см. Определить относительную погрешность, которую допускают, если, вычисляя период колебаний маятника, принимают его за математический маятник длиной L = 15 см.

Ответ: 2,2%.

3.21. Найти период колебаний физического маятника в зависимости от угловой амплитуды.

Тема 4. Сложение колебаний

4.1. Складываются два гармонических колебания одного направления, описываемых уравнениями $x_1 = 3\cos 2\pi t$, см и x_2=3 cos($2\pi t+\pi/4$), см. Определите для результирующего колебания: 1) амплитуду; 2) начальную фазу. Запишите уравнение результирующего колебания и представьте векторную диаграмму сложения амплитуд.

Ответ: 1) A = 5,54 см; 2) $\varphi = \pi/8$; 3) $x = 5{,}54\cos\left(2\pi t + \dfrac{\pi}{8}\right)$, см.

4.2. Найти амплитуду A и начальную фазу φ_0 гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, заданных уравнениями $x_1 = 4\cos\pi t$ и $x_2 = 3\cos(\pi t + \pi/2)$. Написать уравнение результирующего колебания.

Ответ: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\pi/2)} = 0{,}05$ м,

$$tg\varphi_0 = \frac{A_2 \sin(\pi/2)}{A_1 + A_2 \cos(\pi/2)} = 0{,}75,\ \varphi_0 = 37^\circ,\ x = 0{,}05\cos(\pi t + 0{,}2\pi).$$

4.3. Найти амплитуду A колебаний, которые возникают при сложении следующих колебаний одного направления: $x_1 = 3{,}0\cos\omega t$, см $x_2 = 5{,}0\cos(\omega t + \pi/4)$, см и $x_3 = 6{,}0\sin\omega t$ см.

Ответ: $A = 7$ см.

4.4. Амплитуда результирующего колебания, получающегося при сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты, обладающих разностью фаз 60^o, равна A=6 см. Определите амплитуду A_2 второго колебания, если A_1=5 см.

Ответ: A_2=1,65 см.

4.5. В результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами и одинаковыми периодами получается результирующее колебание с тем же периодом и той же амплитудой. Найти разность фаз складываемых колебаний.

Ответ: $\Delta\varphi = 2\pi/3$ рад.

4.6. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = 3\cos\omega t$, см и $y = 4\cos\omega t$, см. Определите уравнение траектории точки и вычертите ее с нанесением масштаба.

Ответ: $y = 4x/3$.

4.7. Точка одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x = 2\cos\omega t$, $y = \sin\omega t$. Определить траекторию точки.

Ответ: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$ - эллипс.

4.8. При сложении двух гармонических колебаний одного направления результирующее колебание точки имеет вид $x = a\cos 2{,}1t \cdot \cos 50{,}0t$, где t - в секундах. Найти круговые частоты складываемых колебаний и период биений.

Ответ: ω_1=47,9 с$^{-1}$, ω_2=52,1 с$^{-1}$, T=1,5 с.

4.9. Складываются два гармонических колебания одного направления, имеющие одинаковые амплитуды и одинаковые начальные фазы, с периодами $T_1 = 2$ с и $T_2 = 2{,}05$ с. Определите: 1) период результирующего колебания; 2) период биения.

Ответ: 1) $T = 2{,}02$ с; 2) $T_б = 82$ с.

4.10. Точка одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x = 2\sin\omega t$ и $y = 2\cos\omega t$. Найти траекторию результирующего колебания.

Ответ: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$ - уравнение окружности с радиусом 2 м

4.11. На горизонтальной поверхности лежит шарик массой m, прикрепленный к вертикальной стенке пружиной жесткостью k. Шарик оттянули от положения равновесия на расстояние x_0 и толкнули к положению равновесия, сообщив ему скорость υ_0. Найти амплитуду A колебаний шарика.

Ответ: $A = \sqrt{x_0^2 + m\upsilon_0^2 / k}$.

4.12. Материальная точка движется так, что ее координаты x и y совершают гармонические колебания по законам $x = \sin\omega t$ и $y = \cos 2\omega t$. Записать уравнение траектории точки.

Ответ: $y = A(1 - 2x^2 / A^2)$ - уравнение параболы.

4.13. Два математических маятника подвешены на нитях длиной l_1=1 м и l_2=0,25 м так, что их свободные концы находятся на одном уровне (рис. 6). Найти число столкновений N этих маятников за время $t = 2$ с от начала движения второго маятника.

Ответ: $N = 3$.

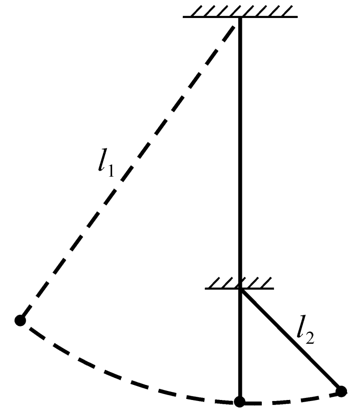


Рис. 6

4.14. Точка участвует одновременно в двух колебаниях одного направления, которые происходят по законам $x_1 = A\cos\omega t$ и $x_2 = A\cos 2\omega t$. Найти максимальную скорость точки.

Ответ: $\upsilon_{мах} = 2{,}73A\omega$.

4.15. Найти уравнение траектории $y(x)$ точки, если она движется по закону: а) $x = A\sin\omega t$, $y = A\sin 2\omega t$; б) $x = A\sin\omega t$, $y = A\cos 2\omega t$. Изобразить примерные графики этих траекторий.

Ответ: а) $y^2 = 4x^2\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)$; б) $y = A\left(1-\frac{2x^2}{A^2}\right)$.

4.16. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = 3\cos(2\omega t)$, см и $y = 4\cos(2\omega t+\pi)$, см. Определите уравнение траектории точки и вычертите ее с нанесением масштаба.

Ответ: $y = -4x/3$.

4.17. Складываются два колебания одинакового направления, выражаемых уравнениями $x_1 = A_1 \cos\omega(t + \tau_1)$, $x_2 = A_2 \cos\omega(t + \tau_2)$, где A_1 = 1 см; A_2 = 2 см; $\tau_1 = \frac{1}{6}$ с; $\tau_2 = \frac{1}{2}$ с; $\omega = \pi$ с$^{-1}$. Определить начальные фазы φ_1 и φ_2 составляющих колебаний; найти амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания.

Ответ: $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$ рад, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ рад; $\varphi = 70{,}9^0 = 0{,}394\,\pi$ рад; A = 2,65 см.

4.18. Точка совершает одновременно два гармонических колебания одинаковой частоты, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями: $x = A \cos\omega t$ и $y = A_1 \cos\omega t$; Найти уравнение траектории точки, построить ее с соблюдением масштаба и указать направление движения. Принять: A = 2 см; A_1 = 3 см.

Ответ: $y = \frac{A_1 x}{A}$, $y = \frac{3}{2}x$.

4.19. Точка совершает одновременно два гармонических колебания одинаковой частоты, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями: $x = A \cos\omega t$ и $y = A \cos(\omega t + \varphi_1)$; Найти уравнение траектории точки, построить ее с соблюдением масштаба и указать направление движения. Принять: A = 2 см; $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $x^2 + y^2 = A^2$, $x^2 + y^2 = 4$.

4.20. Точка совершает одновременно два гармонических колебания одинаковой частоты, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями: x =

A_2 cosωt и $y = A_1\cos(\omega t + \varphi_2)$; Найти уравнение траектории точки, построить ее с соблюдением масштаба и указать направление движения. Принять: A = 2 см; A_2 = 1 см; $\varphi_2 = \pi$.

Ответ: $y = -\dfrac{A_2 x}{A_1}, y = -\dfrac{1}{2}x.$

4.21. Точка совершает одновременно два гармонических колебания одинаковой частоты, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями: $x = A\cos\omega t$ и $y = A_1\sin\omega t$; Найти уравнение траектории точки, построить ее с соблюдением масштаба и указать направление движения. Принять: A = 2 см; A_1 = 3 см.

Ответ: $\dfrac{x^2}{A_1^2} + \dfrac{y^2}{A_2^2} = 1,\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1.$

Тема 5. Затухающие колебания

5.1. Амплитуда затухающих колебаний маятника за время t_1=5 мин уменьшилась в два раза. За какое время t_2, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в восемь раз.

Ответ: t_2=900 с.

5.2. За время t=8 мин амплитуда затухающих колебаний маятника уменьшилась в три раза. Определить коэффициент затухания δ.

Ответ: δ=0,0023 Гц.

5.3. Амплитуда колебаний маятника длиной l=1 м за время t=10 мин уменьшилась в два раза. Определить логарифмический декремент затухания θ.

Ответ: $\theta = 2{,}31 \cdot 10^{-3}$.

5.4. Логарифмический коэффициент затухания θ маятника равен 0,003. Определить число N полных колебаний, которые должен сделать маятник, чтобы амплитуда уменьшилась в два раза.

Ответ: N =231.

5.5. Гиря массой m=500 г подвешена к спиральной пружине жесткостью k=20 Н/м и совершает упругие колебания в некоторой среде. Логарифмический коэффициент затухания θ=0.004. Определить число N полных колебаний, которые должна совершить гиря, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в два раза. За какое время t произойдет это уменьшение.

Ответ: N =153, t=172 с.

5.6. Тело массой m=5 г совершает затухающие колебания. В течение времени t=50 с тело потеряло 60 % своей энергии. Определить коэффициент сопротивления r.

Ответ: $r = 9{,}16 \cdot 10^{-5}$ кг/с.

5.7. Определить период T затухающих колебаний, если период T_0 собственных колебаний системы равен 1 с и логарифмический декремент затухания θ=0,628.

Ответ: T =1,005 с.

5.8. Найти число N полных колебаний системы, в течение которых энергия системы уменьшилась в n=2 раза. Логарифмический декремент затухания θ=0,01.

Ответ: N =35.

5.9. Тело массой массой m=1 кг находится в вязкой среде с коэффициентом сопротивления r =0,05 кг/с. С помощью одинаковых пружин жесткостью k=50 Н/м каждая тело удерживается в положении равновесия, пружины

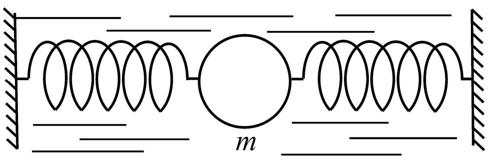


Рис. 8

при этом не деформированы (рис. 8). Тело сместили от положения равновесия и отпустили. Определить: 1) коэффициент затухания β; 2) частоту ν колебаний; 3) логарифмический декремент колебаний θ; 4) число N колебаний, по прошествии которых амплитуда уменьшится в e раз.

Ответ: 1) β=0,025; 2) ν=1,59 Гц; 3) θ=0,0157; 4) N =64.

5.10. Найти добротность математического маятника длины L = 50 см, если за промежуток времени τ = 5,2 мин его полная механическая энергия уменьшилась в $\eta = 4 \cdot 10^4$ раз.

$$Ответ:\ Q \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4g\tau^2}{L\ln^2\eta} - 1} = 1{,}3 \cdot 10^2.$$

5.11. Период затухающих колебаний T =1 с, логарифмический декремент затухания θ = 0,3, начальная фаза равна нулю. Смещение точки при t = $2T$ составляет 5 см. Запишите уравнение движения этого колебания.

Ответ: $x = 9{,}1e^{-0{,}3}\cos 2\pi t$, см.

5.12. Тело массой m=0,6 кг, подвешенное к спиральной пружине жесткостью k=30 Н/м, совершает в некоторой среде упругие колебания. Логарифмический декремент колебаний θ = 0,01. Определите: 1) время, за которое амплитуда колебаний уменьшиться в 3 раза; 2) число полных колебаний, которые должна совершить гиря, чтобы произошло подобное уменьшение амплитуды.

Ответ: t_1 = 97,6 с; N_1 = 110.

5.13. Какова общая сумма путей, пройденных взад и вперед колеблющейся точкой до полного затухания колебаний, если амплитуда первого колебания равна 1 мм, а логарифмический декремент затухания равен 0,002.

Ответ: 2 м.

5.14. Через сколько времени энергия колебаний камертона с частотой ν =600 Гц уменьшится в $n = 10^6$ раз, если логарифмический декремент затухания равен 0,0008?

Ответ: t =14 с.

5.15. Каков логарифмический декремент затухания маятника длиной 0,8 м, если его начальная амплитуда 5°, а через 5 мин амплитуда равна 0,5°?

Ответ: θ=0,014.

5.16. Осциллятор со временем релаксации τ= 20 с в момент t = 0 имеет начальное смещение x_0 = 10 см. При каком значении начальной скорости $\dot{x}_0$ это смещение окажется равным своей амплитуде?

Ответ: $\dot{x}_0 = -0{,}5$ см/с.

5.17. К пружине подвесили грузик, и она растянулась на Δx = 9,8 см. С каким периодом будет колебаться грузик в вертикальном направлении? Логарифмический декремент затухания θ= 3,1.

Ответ: T =0,7 с.

5.18. Частицу сместили из положения равновесия на расстояние l=1,0 см и предоставили самой себе. Какой путь пройдет, колеблясь, эта частица до полной остановки, если логарифмический декремент затухания θ= 0,02?

Ответ: s =2 м.

5.19. Однородный диск радиуса $R = 13$ см может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через край диска. Найти период малых колебаний этого диска, если логарифмический декремент затухания $\theta = 1{,}00$.

Ответ: $T = 0{,}9$ с.

5.20. Точка совершает колебания с частотой $\omega = 25$ с$^{-1}$. Найти коэффициент затухания δ, если в начальный момент скорость точки равна нулю, а ее смещение из положения равновесия в $\eta = 1{,}020$ раза меньше амплитуды.

Ответ: $\delta = 5$ с$^{-1}$.

5.21. Математический маятник совершает колебания в среде, для которой логарифмический декремент затухания $\theta_0 = 1{,}50$. Каким будет значение θ, если сопротивление среды увеличить в $n = 2{,}00$ раза? Во сколько раз следует увеличить сопротивление среды, чтобы колебания стали невозможны?

Ответ: $\theta = 3{,}3$; $n' = 4{,}3$.

5.22. Найти добротность осциллятора, у которого: а) амплитуда смещения уменьшается в $\eta = 2{,}0$ раза через каждые $n = 110$ периодов колебаний; б) собственная частота $\omega_0 = 100$ с$^{-1}$ и время релаксации $\tau = 60$ с.

Ответ: а) $\theta = 500$; б) $\theta = 3 \cdot 10^3$.

5.23. Найти добротность математического маятника длины $l = 50$ см, если за $\tau = 5{,}2$ мин его полная механическая энергия уменьшилась в $\eta = 4 \cdot 10^4$ раз.

Ответ: $\theta = 1{,}3 \cdot 10^2$.

Тема 6. Вынужденные колебания. Резонанс.

6.1. Груз массой m = 25 г, подвешенный на нити длиной l = 10 см, колеблется в жидкости. Коэффициент сопротивления r = 0,05 кг/с. На тело действует вынуждающая сила, меняющаяся по закону $F = 0{,}2 \sin\omega t$ (Н). Определить, при какой частоте вынуждающей силы амплитуда вынужденных колебаний будет максимальна. Найти амплитуду колебаний для частоты $\omega = 20$ с$^{-1}$.

Ответ: ω= 9,8 $с^{-1}$, $A=2{,}7\cdot 10^{-2}$ м.

6.2. Гиря массой m=400 г, подвешенная на спиральной пружине жесткостью k=40 Н/м, опущена в масло. Коэффициент сопротивления r для этой системы составляет 0,5 кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F=\cos\omega t$, Н. Определите: 1) амплитуду вынужденных колебаний, если частота вынуждающей силы вдвое меньше собственной частоты колебаний; 2) частоту вынуждающей силы при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна; 3) резонансную амплитуду.

Ответ: 1) A=0,033 м; 2) $\omega_{рез}$=9,96 $с^{-1}$; 3) $A_{рез}$=0,2 м.

6.3. Гиря массой m=200 г, подвешенная на спиральной пружине жесткостью k=50 Н/м, совершает колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления r=0,2 кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F=2\cos\omega t$, Н. Определите: 1) частоту ν_0 собственных колебаний; 2) резонансную частоту $\nu_{рез}$; 3) резонансную амплитуду $A_{рез}$; 4) статическое отклонение.

Ответ: 1) ν_0=7,96 Гц; 2) $\nu_{рез}$=2 см; $A_{рез}$ =0,02 м; 4) $4\cdot 10^{-3}$ м.

6.4. Показать, что при вынужденных колебаниях работа сил трения (по модулю) за период равна работе внешних сил за то же время.

6.5. Некоторая резонансная кривая соответствует осциллятору с логарифмическим декрементом затухания θ=1,6. Найти для этой кривой отношение максимальной амплитуды смещения к амплитуде смещения при очень малой частоте.

Ответ: $\eta=\dfrac{\pi}{\theta}\left(1+\dfrac{\theta^2}{4\pi^2}\right)=2{,}1$.

6.6. На чашку весов массой M, подвешенную на пружине жесткостью k, с высоты h падает небольшой груз массой m. Удар груза на дно чашки является абсолютно неупругим. Чашка в результате падения груза начинает совершать колебания. Определите амплитуду A этих колебаний.

Ответ: $A=\sqrt{\dfrac{m^2g^2}{k^2}+\dfrac{2m^2gh}{(m+M)k}}$.

6.7. Во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний будет меньше резонансной амплитуды, если частота изменения вынуждающей силы будет больше резонансной частоты: 1) на 10% ?; 2) в два раза? Коэффициент затухания δ в обоих случаях принять равным $0{,}1\omega_0$ (ω_0 - круговая частота собственных колебаний).

Ответ: 1) 1,53; 2) 15,2.

6.8. Шарик массы m = 50 г подвешен на невесомой пружине жесткости k = 20 Н/м. Под действием вынуждающей вертикальной гармонической силы с частотой ω=25 $с^{-1}$ шарик совершает установившееся колебания. При этом смещение шарика отстает по фазе от вынуждающей силы на $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$. Найти добротность данного осциллятора.

Ответ: $Q = \sqrt{\dfrac{\omega^2\omega_0^2}{(\omega^2-\omega_0^2)tg^2\varphi} - \dfrac{1}{4}} = 2{,}2$, где $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

6.9. Шарик массы m, подвешенный на невесомой пружинке, может совершать вертикальные колебания с коэффициентом затухания δ. Собственная частота колебаний ω_0. Под действием внешней вертикальной силы, меняющейся по закону $F_x = F_0 \cos\omega t$, шарик совершает установившееся гармонические колебания. Найти: 1) среднюю за период колебания мощность $P_{ср}$ силы F; 2) частоту ω вынуждающей силы, при которой $P_{ср}$ максимальна; 3) чему равна P_{max}?

Ответ: 1) $P_{ср} = \dfrac{\dfrac{F_0^2\delta\omega^2}{m}}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}$; 2) $\omega = \omega_0$; 3) $P_{max} = \dfrac{F_0^2}{4\delta m}$.

6.10. На горизонтальной пружине k=900 Н/м укреплен шар массой M = 4 кг, лежащий на гладком столе, по которому он может скользить без трения. Пуля массой m= 10 г, летящая с горизонтальной скоростью υ_0 = 600 м/с и имеющая в момент удара скорость, направленную вдоль пружины, попала в шар и застряла в нем. Пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха, определите: 1) амплитуду колебаний шара; 2) период колебаний шара.

Ответ: T = 0,419 с; A= 10 см.

6.11. Амплитуды скорости вынужденных колебаний при частотах вынуждающей силы, равных $\nu_1 = 200$ Гц и $\nu_2 = 300$ Гц, равны между собой. Принимая, что амплитуда вынуждающей силы в обоих случаях одна и та же, найти частоту, соответствующую резонансу скорости.

Ответ: ν=245 Гц.

6.12. Амплитуды смещений вынужденных колебаний при частотах вынуждающей силы, равных $\nu_1 = 200$ Гц и $\nu_2 = 300$ Гц, равны между собой. Найти частоту, соответствующую резонансу смещений.

Ответ: ν=255 Гц.

6.13. К спиральной пружине жесткостью k=10 Н/м подвесили грузик массой m=10 г и погрузили всю систему в вязкую среду. Приняв коэффициент сопротивления r равным 0,1 кг/с, определить:
1) частоту ν_0 собственных колебаний; 2) резонансную частоту $\nu_{рез}$; 3) резонансную амплитуду $A_{рез}$, если вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону и ее амплитудное значение F_0=0,02 Н; 4) отношение резонансной амплитуды к статическому смещению под действием силы F_0.

Ответ: 1) ν_0=5,03 Гц; 2) $\nu_{рез}$=4,91 Гц; 3) $A_{рез}=6{,}4\cdot 10^{-3}$ м; 4) 3,2.

6.14. Шарик массы m может совершать незатухающие гармонические колебания около точки x=0 с собственной частотой ω_0. В момент t=0, когда шарик находился в состоянии равновесия, к нему приложили вынуждающую силу $F_x = F_0 \cos\omega t$, совпадающую по направлению с осью X. Найти закон вынужденных колебаний шарика $x(t)$.

Ответ: $x = (F_0 / m)(\cos\omega_0 t - \cos\omega t)/(\omega^2 - \omega_0^2)$.

6.15. Установить в условиях предыдущей задачи закон движения шарика $x(t)$, если частота вынуждающей силы равна собственной частоте ω_0 колебаний шарика.

Ответ: $x = (F_0 t / 2m\omega_0)\sin\omega_0 t$.

6.16. Оценить, через сколько времени установятся колебания в системе с добротностью Q=10^6 и собственной частотой ω_0= 5000 с$^{-1}$ при резонансном воздействии на эту систему вынуждающей гармонической силы.

Ответ: $\tau = 4\cdot 10^2$ с.

6.17. Найти добротность осциллятора, у которого отношение резонансной частоты $\omega_{рез}$ к частоте затухающих колебаний ω равно η=0,97.

Ответ: $\theta = 2$.

6.18. Найти разность фаз φ между смещением и вынуждающей силой при резонансе смещения, если собственная частота ω_0 = 50 с$^{-1}$ и коэффициент затухания δ = 5,2 с$^{-1}$.

Ответ: $\varphi = 84^0$.

6.19. Найти выражение для вынуждающей силы, под действием которой осциллятор массы m с коэффициентом затухания δ испытывает колебания по закону $x = a\sin(\omega_0 t - \varphi)$, где ω_0 - собственная частота осциллятора.

Ответ: $F(t) = 2\delta m a \omega_0 \cos(\omega_0 t - \varphi)$.

6.20. Осциллятор массы m движется по закону $x = a\sin\omega t$ под действием вынуждающей силы $F_x = F_0 \cos\omega t$. Найти коэффициент затухания δ осциллятора.

Ответ: $\delta = F_0 /(2ma\omega)$.

6.21. Амплитуды смещений вынужденных гармонических колебаний при частотах ω_1 = 400 с$^{-1}$ и ω_2 = 600 с$^{-1}$ равны между собой. Найти частоту ω, при которой амплитуда смещения максимальна.

Ответ: $\omega_{рез} = 5{,}1 \cdot 10^2$ с$^{-1}$.