Примеры решения задач

Задача 1. Через какое минимальное время t, считая от начала колебаний, смещение колеблющейся материальной точки составит половину амплитуды? Период колебаний T = 24 с. Найти среднюю скорость точки $\upsilon_{ср}$ за это время. Амплитуда колебаний A= 0,1 м.

Дано	***Решение***
$\alpha_0 = 0$ $x = A/2$ $T = 24$ с $A = 0{,}1$ м	Обозначим α_0 начальную фазу колебаний, x - смещение колеблющейся точки. *Решение.* Поскольку в условии задачи идет речь о смещении x и амплитуде A колеблющейся точки, запишем уравнение гармонических колебаний точки, в которое входят обе эти величины (с учетом, что $\alpha_0 = 0$):
t=? $\upsilon_{ср}$=?	$$x = A\cos\omega t.$$

Выразим неизвестную нам циклическую частоту ω через известный период T: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Теперь подставим это выражение вместо ω в предыдущее уравнение и, кроме того, вместо смещения x в левую часть этого уравнения подставим $A/2$ в соответствии с условием задачи.

Получим $\dfrac{A}{2} = A\cos\dfrac{2\pi}{T}t$ или после сокращения амплитуды A $\cos\dfrac{2\pi}{T}t = \dfrac{1}{2}$. Таким образом, мы получим, что косинус угла $\alpha = \dfrac{2\pi}{T}t$ равен $\dfrac{1}{2}$. Следовательно, сам угол $\alpha = \dfrac{2\pi}{T}t$ равен 60° или $\dfrac{\pi}{3}$ рад: $\dfrac{2\pi}{T}t = \dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2t}{T} = \dfrac{1}{3}$. Отсюда $t = \dfrac{T}{6}$. Вычислим время t: $t = \dfrac{24}{6}$ с = 4 с.

Чтобы найти среднюю скорость переменного движения точки, надо разделить путь, пройденный ею, на это время. Поскольку путь, пройденный точкой от момента начала отсчета времени колебания, равен половине амплитуды (ведь этот путь есть смещение точки), а время t мы нашли, то средняя скорость точки за это время $\upsilon_{ср} = \dfrac{A}{2t}$.

Подставим численные значения A и t и произведем вычисления:

$$\upsilon_{ср} = \frac{0{,}1}{2 \cdot 4} \text{ м/с} = 0{,}0125 \text{ м/с}.$$

Ответ: $t = 4$ с, $\upsilon_{ср} = 0{,}0125$ м/с.

Задача 2. Гармонические колебания величины s описываются уравнением $s = 0{,}02\cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, м. Определите: 1) амплитуду колебаний; 2) циклическую частоту; 3) частоту колебаний; 4) период колебаний.

Дано	***Решение***
$s = 0{,}02\cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, м	Уравнение гармонических колебаний имеет вид $s = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Сравнивая его с данным, имеем
1) A = ? 2) ω_0 = ? 3) ν = ? 4) T = ?	A=0,02 м, $\omega_0 = 6\pi$ с$^{-1}$, $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}$=3 Гц, $T = \frac{1}{\nu}$=0,33 с.

Ответ: A=0,02 м, $\omega_0 = 6\pi$ с$^{-1}$, ν=3 Гц, T=0,33 с.

Задача 3. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой A=4 см и периодом T=2 с. Напишите уравнение движения точки, если ее движение начинается из положения x_0=2 см.

Дано	*Решение*
A=4 см=$4\cdot10^{-2}$ м T=2 с x_0=2 см=$4\cdot10^{-2}$ м	Уравнение гармонических колебаний имеет вид $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. В момент времени $t = 0$, $x_0 = A\cos\varphi$, отсюда $\cos\varphi = \frac{x_0}{A}$=0,5, а $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
$x(t)$ - ?	

В результате уравнение движения точки будет иметь вид

$$x = 0{,}04\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right), \text{ м.}$$

Ответ: $x = 0{,}04\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, м.

Задача 4. Материальная точка совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0{,}02\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, м. Определите: 1) амплитуду колебаний; 2) период колебаний; 3) начальную фазу колебаний; 4) максимальную скорость точки; 5) максимальное ускорение точки; 6) через сколько времени после начала отсчета точка будет проходить через положение равновесия.

Дано	*Решение*
$x = 0{,}02\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, м	Уравнение гармонических колебаний имеет вид $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Сравнивая его с данным, имеем A=0,02 м.
1) A = ? 2) T = ? 3) φ = ? 4) υ_{max} = ? 5) a_{max} = ? t = ?	Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, так как $\omega_0 = \pi$, отсюда T=2 с, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Скорость есть первая производная от перемещения по времени, а ускорение вторая соответственно, откуда $\upsilon = -0{,}02\pi\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, υ_{max}=0,02π м/с, $a = -0{,}02\pi^2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, a_{max}=0,02π^2 м/с^2.

При $x = 0$ $0{,}02\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\pi t + \frac{\pi}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ (m=0,1,2,3…),

$t = \frac{m\pi}{\pi} = m$.

Ответ: 1) A=0,02 м; 2) T = 2 с; 3) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 4) υ_{max}=0,02π м/с;

a_{max}=0,02π^2 м/с^2; 6) $t = m$ с, где m=0,1,2,3…

Задача 5. Математический маятник массой m = 0,01 кг колеблется согласно уравнению x=5 $\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$. Найти максимальную силу F_m, действующую на него, и его полную механическую энергию E. Чему равна длина маятника l?

Дано	***Решение***
m= 0,01 кг x=5cos$\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$	По второму закону Ньютона $F_m = ma_m$, где максимальное ускорение маятника $a_m = \omega^2 A$, поэтому $F_m = m\omega^2 A$. Из уравнения в условии задачи следует, что A=5 м и $\omega = \frac{\pi}{3}\frac{\text{рад}}{\text{с}}$, поэтому $F = \frac{5}{9}\pi^2 m$=0,055 Н.
F_m=? E = ? l=?	

Одну величину мы нашли. Теперь найдем полную механическую энергию маятника E. По закону сохранения механической энергии она равна его максимальной кинетической энергии T_m: $T = T_m = \frac{m\upsilon_m^2}{2}$=0,014 Дж, где максимальная скорость $\upsilon_m = \omega A$ или

$\upsilon_m = \frac{5}{3}\pi$, поэтому $T = \frac{m}{2}\left(\frac{5}{3}\pi\right)^2$. Поскольку $\omega^2 = \frac{g}{l}$, то $\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = \frac{g}{l}$, откуда $l = \frac{9g}{\pi^2}$=8,9 м.

Ответ: F_m=0,055 Н, E=0,14 Дж, l=8,9 м.

Задача 6. Материальная точка колеблется согласно уравнению $x = A\cos\omega t$, где A=5 см и $\omega = \pi/12$ с$^{-1}$. Возвращающая сила F в первый раз достигает значения –12 мН, потенциальная энергия П точки оказывается равной 0,15 мДж. Определите: 1) этот момент времени t; 2) соответствующую этому моменту фазу ωt.

Дано	***Решение***
$x = A\cos\omega t$ A=5 см=$5\cdot10^{-2}$ м $\omega = \pi/12$ с$^{-1}$ $F = -1{,}2\cdot10^{-2}$ Н $\Pi = 1{,}5\cdot10^{-4}$ Дж	Возвращающая сила определяется согласно закону Гука $F = -kx = -Ak\cos\omega t$. Потенциальная энергия в этом случае $\Pi = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2\omega t$. Найдем отношение
1) t - ? 2) ωt - ?	$\frac{\Pi}{F} = -\frac{A}{2}\cos\omega t$. Откуда $t = \frac{1}{\omega}\arccos\left(-\frac{2\Pi}{AF}\right)$, $\omega t = \arccos\left(-\frac{2\Pi}{AF}\right)$.

Ответ: 1) $t = 4$ с; 2) $\omega t = \frac{\pi}{3}$ рад.

Задача 7. Если к шарику массой m_1, колеблющемуся на пружине, подвесить снизу еще один шарик массой m_2 = 300 г, то частота колебаний уменьшится в n = 2 раза. Чему равна масса m_1 первого
шарика?

Дано	***Решение***
m_2 = 300 г $\frac{\nu_1}{\nu_2} = n = 2$	Согласно условию $n = \frac{\nu_1}{\nu_2}$, где $\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}}$ (1) – частота колебаний первого шарика, k - жесткость пружины, $\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$ (2) – частота колебаний обоих шариков. Разделим (1) на (2):
m_1 - ?	

$$n = \frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}}}{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}} = \sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1 k}} = \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1}}.$$

Отсюда $n^2 = \frac{m_1+m_2}{m_1}$ или $n^2 = 1 + \frac{m_2}{m_1}$, $\frac{m_2}{m_1} = n^2 - 1$ и $m_1 = \frac{m_2}{n^2-1}$.

Произведем вычисления: $m_1 = \frac{0{,}3}{4-1}$ кг = 0,1 кг.

Ответ: m_1 = 0,1 кг.

Задача 8. Во сколько раз уменьшится период колебаний шарика на резиновом подвесе, если его укоротить, отрезав 75% его длины?

Дано	***Решение***
$\frac{\Delta l}{l_1}$ = 0,75	Обозначим $\Delta l = l_1 - l_2$ изменение длины подвеса, l_1- первоначальную и l_2 - конечную длины, T_1- период колебаний шарика длине l_1, T_2- период его колебаний после укорочения подвеса.
T_1/T_2 = ?	

Решение. Период колебаний T_1, определим по формуле $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}$, (1) где m – масса шарика, k_1 – жесткость резинового подвеса. Жесткость резины k_1 связана с длиной подвеса l_1 формулой

$$k_1 = \frac{ES}{l_1}, \qquad (2)$$

где E – модуль Юнга (модуль упругости) резины и S – площадь поперечного сечения подвеса. Подставим (2) в (1):

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{ml_1}{ES}}. \qquad (3)$$

Аналогично

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{ml_2}{ES}}. \qquad (4)$$

Чтобы исключить из решения неизвестные параметры *m*, *E* и *S* и ответить на вопрос задачи, разделим (3) на (4):

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{ml_1}{ES}}}{2\pi\sqrt{\frac{ml_2}{ES}}} = \sqrt{\frac{ml_1ES}{ESml_2}} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}.$$

Согласно условию $\Delta l = l_1 - l_2$=0,75 l_1, откуда $l_2 = l_1 - \Delta l =$ $l_1 - 0{,}75l_1 =$ $0{,}25l_1$, поэтому

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{0{,}25l_1}} = 2.$$

Ответ: $\frac{T_1}{T_2} = 2.$

Задача 9. Два малых бруска массами m_1 и m_2 связаны пружиной с жесткостью k. Пружина сжата, а бруски удерживаются нитью. С каким периодом T будет колебаться каждый брусок, если нить пережечь? Трением пренебречь.

Дано	***Решение***
m_1 m_2 k	Пусть, когда пружина еще не была сжата, расстояние от левого бруска до центра масс С этой системы было l_1 и расстояние от правого бруска до центра масс С было l_2 (размерами брусков мы пренебрегаем).
T = ?	Согласно определению центра масс его положение должно удовлетворять условию

$$m_1 l_1 = m_2 l_2, \qquad (1)$$

когда пружина еще не сжата.

Если же она сжата, то это же условие примет вид

$$m_1(l_1 - A_1) = m_2(l_2 - A_2), \qquad (2)$$

где A_1 – наибольшее смещение левого бруска, т. е. его будущая амплитуда колебаний, а A_2 – амплитуда колебаний правого бруска.

Раскроем скобки в (2):

$$m_1 l_1 - m_1 A_1 = m_2 l_2 - m_2 A_2. \qquad (3)$$

Заменим в (3) $m_2 l_2$ на $m_1 l_1$ согласно (1):

$$m_1 l_1 - m_1 A_1 = m_1 l_1 - m_2 A_2 \text{ или } m_1 A_1 = m_2 A_2 \text{ откуда}$$

$$A_2 = \frac{m_1}{m_2} A_1. \qquad (4)$$

Вся деформация пружины x равна сумме амплитуд $A_1 + A_2 : x = A_1 + A_2$ или с учетом (4)

$$x = A_1 + \frac{m_1}{m_2} A_1 = A_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right).$$

По закону Гука сила, с которой пружина действует на брусок массой m_1

$$F_1 = kx = kA_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right). \qquad (5)$$

С другой стороны, по второму закону Ньютона $F_1 = m_1 a_{m1}$, где максимальное ускорение бруска массой m_1 $a_{m1} = \omega^2 A_1 = \frac{4\pi^2}{T^2} A_1$, поэтому

$$F_1 = m_1 \frac{4\pi^2}{T^2} A_1. \qquad (6)$$

Приравняем (5) и (6) и из полученного равенства определим период колебаний бруска m_1 (он у обоих брусков одинаков):

$A_1\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) = m_1 \frac{4\pi^2}{T^2} A_1$, откуда $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)}}$ или

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1+m_2)}}$.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1+m_2)}}$.

Задача 10. Пружинный маятник вывели из положения равновесия и отпустили. Через какое минимальное время t, считая от начала колебания, его потенциальная энергия станет равна кинетической, если масса маятника m = 100 г, а жесткость пружины k = 10 Н/м ?

Дано	***Решение***
$W_n = W_k$ m = 0,1 кг k = 10 Н/м $\alpha_0 = 0$	Обозначим α_0=0 начальную фазу колебаний. Мгновенные потенциальная W_n и кинетическая W_k энергии пружинного маятника определяются равенствами
t = ?	$W_n = \frac{kx^2}{2}$ и $W_k = \frac{m\upsilon^2}{2}$,

где x – смещение и υ – мгновенная скорость маятника. Поскольку $W_n = W_k$ согласно условию, то

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} \text{ и } kx^2 = m\upsilon^2. \qquad (1)$$

Теперь запишем уравнения гармонических колебаний для смещения и скорости:

$$x = A\cos\omega t \text{ при } \alpha_0 = 0 \qquad (2)$$

$$\upsilon = x' = -\omega A\sin\omega t. \qquad (3)$$

Подставим (2) и (3) в (1) и учтем, что

$$\omega^2 = \frac{k}{m},$$

$$kA^2\cos^2\omega t = m\omega^2 A^2\sin^2\omega t,$$

$$k\cos^2\omega t = m\frac{k}{m}\sin^2\omega t,$$

$$\cos^2\omega t = \sin^2\omega t, \text{ поэтому } \cos\omega t = \sin\omega t$$

$$\text{или } tg\omega t = 1 \text{ и, значит, } \omega t = \frac{\pi}{4},\ t = \frac{\pi}{4\omega}.$$

Поскольку $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, то $t = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Произведем вычисления: $t = \frac{3{,}14}{4}\sqrt{\frac{0{,}1}{10}}$ с = 0,08 с.

Ответ: t = 0,08 с.

Задача 11. На какую величину ΔN уменьшится число полных колебаний математического маятника за время t=1 сут, если его длина увеличится на Δl = 4 см? Период колебаний маятника вначале был T_1 = 2 с. На какое время Δt маятник отстанет за сутки вследствие увеличения его длины?

Дано	***Решение***
t = 1 сут Δl = 4 см T_1 = 2 с	Изменение числа колебаний маятника ΔN равно разности между числом колебаний N_1 маятника за сутки до его удлинения и числом его колебаний N_2 после удлинения:
ΔN -? Δt -?	

$$\Delta N = N_1 - N_2 \qquad (1)$$

Число колебаний N_1 равно отношению времени t к периоду T_1:

$$N_1 = \frac{t}{T_1}. \qquad (2)$$

Новое число колебаний N_2 равно отношению времени t к периоду колебаний T_2 удлиненного маятника:

$$N_2 = \frac{t}{T_2}. \qquad (3)$$

По формуле Гюйгенса для периода свободных колебаний математического маятника

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \qquad (4)$$

и $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$, где $l_2 = l_1 + \Delta l$, поэтому

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1 + \Delta l}{g}}. \qquad (5)$$

Выразим из (4) $\frac{l_1}{g}$ подставим в (5):

$$\sqrt{\frac{l_1}{g}} = \frac{T_1}{2\pi} \text{ и } \frac{l_1}{g} = \left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2,$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g} + \frac{\Delta l}{g}} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 + \frac{\Delta l}{g}}. \qquad (6)$$

Нам останется подставить (6) в (3), после чего полученное выражение и равенство (2) подставить в (1), и задача будет решена. Выполним эти действия:

$$N_2 = \frac{t}{2\pi\sqrt{\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 + \frac{\Delta l}{g}}},\ \Delta N = \frac{t}{T_1} - \frac{t}{2\pi\sqrt{\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 + \frac{\Delta l}{g}}}$$

$$\Delta N = t\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{\sqrt{T_1^2 + (2\pi)^2\frac{\Delta l}{g}}}\right) = 864.$$

Отставание во времени Δt пропорционально изменению периода $T_2 - T_1$:

$\frac{\Delta t}{t} = \frac{T_2 - T_1}{T_1}, \frac{\Delta t}{t} = \frac{T_2}{T_1} - 1,$ откуда $\Delta t = t\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)$ или с учетом (6)

$$\Delta t = t\left(\frac{2\pi}{T_1}\sqrt{\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 + \frac{\Delta l}{g}} - 1\right) = 1{,}7 \cdot 10^3 \text{ с.}$$

Ответ: $\Delta N = 864$, $\Delta t = 1{,}7 \cdot 10^3$ с.

Задача 12. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной 35 см. Определите на каком расстоянии от центра масс должна быт точка подвеса, чтобы частота колебаний была максимальной.

Дано	***Решение***
l =35 см=0,35 м $\omega = \omega_{max}$	Период колебаний физического маятника определяется выражением $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgx}}$, где J - момент инерции маятника относительно оси колебания, x - приведенная длина или расстояние
x - ?	

между центром масс и осью колебаний.

Циклическая частота колебаний равна $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgx}{J}}$. Момент инерции стержня относительно данной оси, согласно теореме Штейнера равен $J = \frac{ml^2}{12} + mx^2$.

Отсюда $\omega = \sqrt{\frac{mgx}{\frac{ml^2}{12} + mx^2}} = \left(\frac{12gx}{l^2 + 12x^2}\right)^{1/2}$. Для определения точки экстремума, т.е. точки в которой частота колебаний будет максимальна, найдем производную и приравняем ее к нулю $\frac{d\omega}{dx} = \frac{\sqrt{3g}(l^2 - 12x^2)}{\sqrt{x(l^2 + 12x^2)^3}} = 0$, $l^2 - 12x^2 = 0$, $x = \frac{l}{2\sqrt{3}}$.

Ответ: x=10,1 см.

Задача 13. Однородный диск радиусом $R = 20$ см колеблется около горизонтальной оси, проходящей на расстоянии l =15 см от центра диска. Определите период T колебаний диска относительно этой оси.

Дано	***Решение***
$R = 0{,}2$ м $l = 0{,}15$ м T - ?	Период колебаний физического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$. Момент инерции диска не проходящего через центр масс равен $J = \frac{mR^2}{2} + ml^2$.

Подставляя последнюю формулу в выражение для периода колебаний, получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2 + 2ml^2}{2mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2 + 2l^2}{2gl}}.$$

Ответ: T =1,07 с.

Задача 14. На концах тонкого стержня длиной L = 1 м и массой m_3 = 400 г укреплены шарики малых размеров массами m_1 = 200 г и m_2 = 300 г. Стержень колеблется около горизонтальной оси, пер-

пендикулярной стержню и проходящей через его середину (точка О на рис. 1) определить период T колебаний, совершаемых стержнем.

Дано	***Решение***
L = 1 м m_1=0,2 кг m_2=0,3 кг m_3=0,4 кг	Период колебаний физического маятника, каким является стержень с шариками, определяется соотношением $$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL_c}}, \quad (1)$$ где J - момент инерции маятника относительно оси колебаний; m - его масса; L_c - расстояние от центра масс маятника до оси.
T - ?	

Момент инерции данного маятника равен сумме моментов инерции шариков J_1 и J_2 и стержня J_3:

$$J = J_1 + J_2 + J_3. \quad (2)$$

Принимая шарики за материальные точки, выразим моменты их инерции: $J_1 = m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2$, $J_2 = m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2$. Так как ось проходит через середину стержня, то его момент инерции относительно этой оси $J_3 = \frac{1}{12}m_3L^2$. Подставив полученные выражения J_1, J_2 и J_3 в формулу (2), найдем общий момент инерции физического маятника:

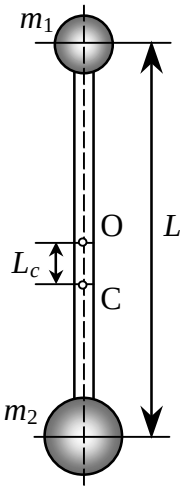

Рис.1.

$$J = m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}m_3L^2 = \frac{1}{12}L^2(3m_1 + 3m_2 + m_3).$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем $J = 0{,}158\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$.

Масса маятника состоит из масс шариков и массы стержня:

$m = m_1 + m_2 + m_3 = 0{,}9$ кг. Расстояние L_c центра масс маятника от оси колебаний найдем, исходя из следующих соображений. Если ось X направить вдоль стержня и начало координат совместить с точкой О (рис.1), то искомое расстояние L равно координате центра масс маятника, т.е.

$$L_c = x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m_1\left(-\frac{L}{2}\right) + m_2\left(\frac{L}{2}\right) + m_3 \cdot 0}{m_1 + m_2 + m_3},$$

или

$$L_c = \frac{(m_2 - m_1)L}{2(m_1 + m_2 + m_3)} = \frac{(m_2 - m_1)L}{2m}.$$

Подставив значения величин m_1, m_2, m, L и произведя вычисления, найдем L_c = 5,55 см. Произведя расчеты по формуле (1), получим период колебаний физического маятника T = 11,2 с.

Ответ: T = 11,2 с.

Задача 15. Разность фаз двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода T=4 с и одинаковой амплитуды A=5 см составляет $\pi/4$. Напишите уравнение движения, получающееся в результате сложения этих колебаний, если начальная фаза одного из них равна нулю.

Дано	***Решение***
$T = 4$ с $A_1 = A_2 = 5 \cdot 10^{-2}$ м $\Delta\varphi = \pi/4$ φ_1=0	Пусть уравнения данных колебаний имеют вид $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ и $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$, где $\omega = 2\pi/T$. Так как φ_1=0, то $x_1 = A_1 \cos\omega t$ и $\varphi_2 = \pi/4$.
$x(t)$-?	Амплитуда результирующего колебания $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi} = A_1\sqrt{2(1+\cos\Delta\varphi)}$.

Определим начальную фазу результирующего колебания:

$tg\varphi = \dfrac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$=0,414. Отсюда $\varphi = \pi/8$. Учитывая, что уравнение результирующего колебания имеет вид $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ и рассчитав значение амплитуды результирующего колебания A=0,0924 м, получим $x = 0{,}0924\cos\left(\dfrac{\pi t}{2} + \dfrac{\pi}{8}\right)$, м.

Ответ: $x = 0{,}0924\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$, м.

Задача 16. Результирующее колебание, получающееся при сложении двух гармонических колебаний одного направления, описывается уравнением вида $x = A\cos t\cos 45t$ (t - в секундах). Определите: 1) циклические частоты складываемых колебаний; 2) период биений результирующего колебания.

Дано	***Решение***
$x = A\cos t\cos 45t$	Результирующее колебание, получающееся при сложении двух гармонических колебаний одного направления имеет вид $x = x_1 + x_2$
1) ω_1 - ? ω_2 - ? 2) $T_б$ - ?	$x = 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi\right)$.

Отсюда $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$=1, $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 45$, $\omega_1 - \omega_2 = 2$, $\omega_1 + \omega_2 = 90$. Складывая два последних уравнения, получим $2\omega_1 = 92$, откуда $\omega_1 = 46$ с$^{-1}$ и $\omega_2 = 44$ с$^{-1}$.

Период биений определяется выражением $T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{2\text{с}^{-1}}$=3,14 с.

Ответ: $\omega_1 = 46$ с$^{-1}$, $\omega_2 = 44$ с$^{-1}$; $T_б$=3,14 с.

Задача 17. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения которых $x = A_1\cos\omega t$ и $y = A_2\cos\frac{\omega}{2}t$, где A_1= 1 см; A_2 = 2 см; $\omega = \pi$ с$^{-1}$. Найти уравнение траектории точки.

Дано	*Решение*
$x = A_1 \cos\omega t$ $y = A_2 \cos\frac{\omega}{2} t$ $A_1 = 0{,}01$ м $A_2 = 0{,}02$ м $\omega = \pi$ с$^{-1}$	Чтобы найти уравнение траектории точки, исключим время t из заданных уравнений. Для этого воспользуемся формулой $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$. В данном случае $\alpha = \omega t$, поэтому $$y = A_2 \cos\frac{\omega}{2} t = A_2 \sqrt{\frac{1+\cos\omega t}{2}}.$$
$y(x)$ - ?	Так как согласно условию $\cos\omega t = \frac{x}{A_1}$, то уравнение траектории $$y = A_2 \sqrt{\frac{1+x/A_1}{2}}.$$

Полученное выражение представляет собой уравнение параболы, ось которой совпадает с осью $0x$.

Ответ: $y = 0{,}02\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{x}{0{,}02}}$ м.

Задача 18. Тело массой m = 0,6 кг, подвешенное к спиральной пружине жесткостью k = 30 Н/м, совершает в некоторой среде упругие колебания. Логарифмический декремент колебаний θ = 0,01. Определите: 1) время, за которое амплитуда колебаний уменьшиться в 3 раза; 2) число полных колебаний, которые должна совершить гиря, чтобы произошло подобное уменьшение амплитуды.

Дано	*Решение*
m = 0,6 кг k = 30 Н/м θ = 0,01 $A_1 / A_2 = 3$	Уравнение затухающих колебаний имеет вид $x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$. Зависимость амплитуды колебаний от времени имеет вид $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$. Начальная амплитуда при t=0 $A_1 = A_0$. В момент времени t_1 амплитуда колебания $A_2 = A_0 e^{-\delta t_1}$. Отсюда, $\frac{A_1}{A_2} = \delta t_1$ и $t_1 = \frac{1}{\delta} \ln\frac{A_1}{A_2}$.
1) t_1 - ? 2) N_1 - ?	

Логарифмический декремент затухания $\theta = \delta T$. Отсюда коэффициент затухания $\delta = \frac{\theta}{T}$ и $t_1 = \frac{T}{\delta}\ln\frac{A_1}{A_2}$. Период собственных колебаний пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Итак, $t_1 = \frac{2\pi}{\delta}\sqrt{\frac{m}{k}}\ln\frac{A_1}{A_2}$ и $N_1 = \frac{t_1}{T} = \frac{1}{\delta}\ln\frac{A_1}{A_2}$.

Ответ: 1) t_1=97,6 с; 2) $N_1 = 110$.

Задача 19. Энергия затухающих колебаний маятника, происходящих в некоторой среде, за время t = 2 мин уменьшилась в N = 100 раз. Определить коэффициент сопротивления, если масса маятника m = 0,1 кг.

Дано	***Решение***
$t = 120$ с m = 0,1 кг $W_0 / W = 100$	Коэффициент сопротивления r связан с коэффициентом затухания δ и массой m тела соотношением $r = 2m\delta$ (1). Чтобы найти величину δ, обратимся к уравнению затухающих колебаний $x = A_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi_0)$.
r - ?	

Стоящий в нем сомножитель

$$A = A_0 e^{-\delta t} \qquad (2)$$

выражает уменьшающуюся со временем амплитуду колебаний.

Из $W = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$ следует, что энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Следовательно, обозначив начальную и конечную энергию колебаний через W_0 и W, можно записать:

$$N = \frac{W_0}{W} = \left(\frac{A_0}{A}\right)^2; \frac{A_0}{A} = \sqrt{N} = 10. \qquad (3)$$

Теперь из (2) и (3) имеем $e^{\beta t}$ = 10. Логарифмируя, находим: δt = ln10; $\delta = \frac{\ln 10}{t}$ Подставив найденное значение δ в (1), получим ответ:

$r = \dfrac{2m\ln 10}{t}$. Учитывая, что m = 0,1 кг, t = 120 с, ln10 = 2,3, и выполнив вычисления, получим: r = 0,0038 кг/с.

Ответ: r = 0,0038 кг/с.

Задача 20. При наблюдении затухающих колебаний выяснилось, что для двух последовательных колебаний амплитуда второго меньше амплитуды первого на 60%. Период затухающих колебаний $T = 0{,}5$ с. Определите коэффициент затухания δ; 2) для тех же условий частоту ν_0 незатухающих колебаний.

Дано	***Решение***
$A_2 = 0{,}4A_1$ $T = 0{,}5$ с	Логарифмический декремент затухания $\theta = \ln\dfrac{A_1}{A_2} = \delta T$. Отсюда коэффициент затухания равен $\delta = \dfrac{1}{T}\ln\dfrac{A_1}{A_2}$. Собственная частота колебательной системы или частота незатухающих колебаний равна $\omega = 2\pi/T$.
1) δ - ? 2) ν_0 - ?	

Циклическая частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ и $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \delta^2}$. Отсюда частота незатухающих колебаний будет равна

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \left(\frac{1}{T}\ln\frac{A_1}{A_2}\right)^2} = \frac{1}{2\pi T}\sqrt{(2\pi)^2 + \left(\ln\frac{A_1}{A_2}\right)^2}.$$

Ответ: 1) δ=1,83 с$^{-1}$; 2) ν_0=2,02 Гц.

Задача 21. Гиря массой m=0,5 кг, подвешенная на спиральной пружине жесткостью k=50 Н/м, совершает колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления r=0,5 кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F = 0{,}1\cos\omega t$, Н. Определите для данной колебательной системы: 1) коэффициент затухания δ; 2) резонансную амплитуду $A_{\text{рез}}$.

Дано	***Решение***
m=0,5 кг k=50 Н/м r=0,5 кг/с $F = 0{,}1\cos\omega t$	Дифференциальное уравнение затухающих колебаний $m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0\cos\omega t$ или $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{x}\cos\omega t$, отсюда $\delta = \frac{r}{2m}$.
1) δ - ? 2) $A_{рез}$ - ?	Резонансная амплитуда $A_{рез} = \frac{F_0}{2\delta m\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$, где $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $F_0 = 0{,}1$ Н.

Отсюда $A_{рез} = \dfrac{F_0}{2\left(\dfrac{r}{2m}\right)\cdot m\sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{r^2}{4m^2}}} = \dfrac{F_0}{r\sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{r^2}{4m^2}}}$.

Ответ: 1) $\delta = 0{,}5$ с; 2) $A_{рез}$=2 см.

Задача 22. Амплитуды двух вынужденных колебаний системы с одинаковыми собственными частотами при всех значениях частоты вынуждающей силы различаются вдвое. Определите, какой одной (и только одной) из величин (массой, коэффициентом сопротивления среды, коэффициентом упругости, амплитуды вынуждающей силы) отличаются эти системы.

Дано	***Решение***
$\omega_{01} = \omega_{02}$ $\frac{A_1}{A_2}$=2	Резонансная частота $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - собственная частота колебательной системы,
m, r, k, F_0 - ?	$\delta = \frac{r}{2m}$ - коэффициент затухания. Отсюда

$$\omega_{рез} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2}}.$$

Отношение $\frac{A_1}{A_2}$=2 для всех ω, значит, и для $\omega_{рез}$: $A_{рез1}$=$A_{рез2}$.

$A_{рез} = \dfrac{F_0}{2\delta m\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \dfrac{F_0}{2r\sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{r^2}{4m^2}}}$. Должна меняться только одна из величин: ни k, ни m $\left(\omega_{01} = \sqrt{\dfrac{k_1}{m_1}} = \omega_{02} = \sqrt{\dfrac{k_2}{m_2}}\right)$, ни r (r входит $A_{рез}$ дважды в знаменателе), изменяется F_0, причем $F_{01} = 2F_{02}$.

Ответ: $F_{01} = 2F_{02}$.

Задача 23. Чему равна амплитуда вынужденных колебаний при резонансе $A_{рез}$, если при очень малой (по сравнению с собственной) частоте вынужденных колебаний она равна A_0= 0,1 см, а логарифмический декремент затухания θ = 0,01?

Дано	***Решение***
$A_0(\omega << \omega_0) = 10^{-3}$ м θ = 0,01	Как видно из $A = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$
$A_{рез}$ - ?	(1), где $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$ амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты ω вынуждающей силы.

При некотором значении $\omega = \omega_{рез}$, определяемом по

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \qquad (2)$$

наступает явление резонанса: амплитуда достигает максимального значения $A_{рез}$. Величину $A_{рез}$ выразим по (1), подставив из (2) $\omega_{рез}$ вместо ω. После ряда упрощений найдем

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \qquad (3)$$

Из формулы (1) можно также вывести простое соотношение между величинами A_0 и f_0. Учитывая вытекающие из условия соотношения: 1) $\omega << \omega_0$; 2) $\theta^2 << 4\pi^2$, откуда следует, что $\delta^2 << \omega_0^2$, отбросим члены ω^2 и $4\,\delta^2\omega^2$ в (1): $A_0 = \dfrac{f_0}{\omega_0^2}$. Подставив это значение f_0 в

формулу (1) и пренебрегая величиной δ^2 по сравнению с ω_0^2, получим

$$A_{\text{рез}} = \frac{A_0\omega_0^2}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{A_0\omega_0}{2\delta}. \qquad (4)$$

Выразим собственную частоту ω_0 и коэффициент затухания δ:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \text{ и } \delta = \frac{\lambda}{T}.$$

Здесь T_0 - период свободных колебаний при отсутствии сопротивления; T - период затухающих колебаний, которые начались бы после прекращения действия вынуждающей силы. Подставив эти значения ω_0 и δ в соотношение (4) и учитывая, что при слабом затухании ($\theta^2 << 4\pi^2$) $T \approx T_0$, найдем окончательный ответ: $A_{\text{рез}} = \frac{\pi A_0}{\theta} = 0{,}31$ м.

Ответ: $A_{\text{рез}} = 0{,}31$ м.