I. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Основные понятия и уравнения

- Колебания
- Свободные (собственные колебания)
- Гармонические колебания
- Период колебаний
- Период гармонических колебаний
- Уравнение гармонических колебаний
- Дифференциальное уравнение гармонических колебаний
- Метод вращающегося вектора амплитуды
- Гармонический осциллятор
- Математический маятник
- Физический маятник
- Пружинный маятник
- Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты
- Биения
- Сложение взаимно перпендикулярных колебаний
- Добротность колебательной системы
- Затухающие колебания
- Декремент затухания
- Логарифмический декремент затухания
- Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний
- Автоколебания
- Вынужденные колебания
- Дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний
- Резонанс

Основные формулы

Уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

[x - смещение колеблющейся величины от положения равновесия; A - амплитуда колебаний; $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi\nu$ - круговая (циклическая частота); $\nu = 1/T$ - частота; T - период колебаний; $\varphi = (\omega_0 t + \varphi_0)$ - фаза; φ_0 - начальная фаза].

Скорость и ускорение точки, совершающей гармонические колебания,

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2),$$

$$a = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$$

[A - амплитуда колебаний; ω_0 - круговая частота; φ_0 - начальная фаза].

Сила, действующая на колеблющуюся материальную точку массой m,

$$F = -m\omega_0^2 x$$

[ω_0 - круговая частота; x - смещение колеблющейся величины от положения равновесия].

Кинетическая энергия точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания,

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]$$

[m - масса материальной точки; υ - ее скорость; A - амплитуда колебаний; ω - круговая частота; φ_0 - начальная фаза].

Потенциальная энергия точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F,

$$\Pi = -\int_0^x F dx = \int_0^x m\omega_0^2 x dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)].$$

Полная механическая энергия

$$E = T + \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний материальной точки массой m

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \text{ или } \ddot{x} + \omega_0 x = 0$$

[x - смещение материальной точки из положения равновесия; k - упругость; ω_0 - круговая частота].

Решение этого уравнения

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

[A - амплитуда колебаний; φ_0 - начальная фаза].

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

[l - длина маятника; g - ускорение свободного падения].

Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

[m - масса пружинного маятника; k - жесткость пружины].

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

[J - момент инерции маятника относительно оси колебаний; d - расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника; $L = J/(md)$ - приведенная длина физического маятника; g - ускорение свободного падения].

Амплитуда A результирующего колебания, получающегося при сложении двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Начальная фаза результирующего колебания

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

[A_1 и A_2 - амплитуды двух складываемых колебаний; φ_1 и φ_2 - начальные фазы колебаний].

Период биений

$$T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

[$\Delta\omega$ - разность частот складываемых колебаний, $\Delta\omega << \omega$].

Уравнение траектории движения точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одинаковой частоты (уравнение эллипса),

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\Delta\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\Delta\varphi$$

[A и B - амплитуды складываемых колебаний; $\Delta\varphi$ - разность фаз обоих колебаний].

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний и его решение

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ или } x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

[x - смещение колеблющегося тела из положения равновесия; $\delta = \frac{r}{2m}$ - коэффициент затухания; r - коэффициент сопротивления; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - собственная частота той же колебательной системы; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ - частота затухающих колебаний; $A_0 e^{-\delta t}$ - амплитуда затухающих колебаний].

Декремент затухания

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}$$

[$A(t)$ и $A(t+T)$ - амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период].

Логарифмический декремент затухания

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}$$

[δ - коэффициент затухания; T - период затухающих колебаний; τ - время релаксации; N_e - число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e - раз].

Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

[θ - логарифмический декремент затухания; ω_0 - циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы; δ - коэффициент затухания].

Дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний и его решение для установившихся колебаний

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\,\omega t \text{ и } x = A\cos(\omega t - \varphi)$$

[x - смещение колеблющегося тела из положения равновесия; F_0 - амплитуда вынуждающей силы; m - масса тела];

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}},\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

[ω_0 - собственная частота той же колебательной системы; ω - частота внешней вынуждающей силы; δ - коэффициент затухания].

Резонансная частота и резонансная амплитуда

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}\,,\ A_{\text{рез}} = \frac{F_0 / m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

[ω_0 - собственная частота колебательной системы; δ - коэффициент затухания; F_0 - амплитуда внешней вынуждающей силы; m - масса тела].